

MODELADO NUMÉRICO DE LA TRANSFERENCIA DE CALOR  
DE UN "SÓLIDO EN MOVIMIENTO" Y  
SU EFECTO EN LA CONVECCIÓN

# Tesis

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE

*Doctor en Ciencia y Tecnología  
en la Especialidad  
Diseño y Desarrollo de Sistemas Mecánicos*

005461

PRESENTA

José Luis Sánchez Gaytán





Director de Posgrado  
PICYT – CIDESI  
Querétaro

Los abajo firmantes, miembros del Jurado del Examen de Grado del alumno **José Luis Sánchez Gaytán**, una vez leída y revisada la Tesis titulada “**Modelado Numérico del Problema de Transferencia de Calor de un “Sólido en Movimiento” y su efecto en la Convección**”, aceptamos que la referida tesis revisada y corregida sea presentada por el alumno para aspirar al grado de Doctor en Ciencia y Tecnología con especialidad en **Diseño y Desarrollo de Sistemas Mecánicos** durante el Examen de Grado correspondiente.

Y para que así conste firmamos la presente a los 1 días del mes de Julio del año dos mil siete.

Dr. JUAN ALEJANDRO VAZQUEZ FEJOO

Presidente

Dr. SEBASTIAN DÍAZ DE LA TORRE

Secretario

Dr. LUIS DEL LLANO VIZCAYA

Vocal

Dr. ARTURO JUAREZ HERNANDEZ

Vocal

Dr. Nicolás Juárez Rodríguez

Vocal



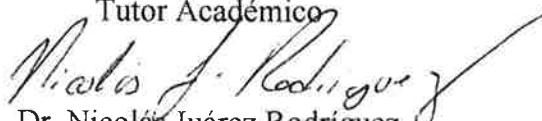
CIENCIA Y TECNOLOGÍA

2007

Director de Investigación y Posgrado  
PICYT – CIDESI  
Querétaro

Los abajo firmantes, miembros del Comité Tutorial del alumno **José Luis Sánchez Gaytán**, una vez leída y revisada la Tesis titulada “**Modelado Numérico del Problema de Transferencia de Calor de un “Sólido en Movimiento” y su efecto en la Convección**”, aceptamos que la referida tesis revisada y corregida sea presentada por el alumno para aspirar al grado de Doctor en Ciencia y Tecnología con especialidad en **Diseño y Desarrollo de Sistemas Mecánicos** durante el Examen de Grado correspondiente.

Y para que así conste firmamos la presente a los 4 días del mes de Julio del año dos mil siete.

Tutor Académico  
  
Dr. Nicolás Juárez Rodríguez

Tutor en Planta  
  
M. C. Alfredo Manzo Preciado

# CONTENIDO

## Nomenclatura

### I. Introducción

1.1	Resumen . . . . .	6
1.2	Justificación . . . . .	8
1.3	Objetivos . . . . .	9
1.4	Estado del Arte . . . . .	9
1.5	Organización de la tesis . . . . .	17

### II Antecedentes

2.1	El Término Inestable . . . . .	20
2.2	Convección y Difusión . . . . .	25
2.3	Sistemas Coordinados. . . . .	28
2.4	Deducción de la Ecuación de Transferencia de Calor. . . . .	30
2.4.1	Ecuación Diferencial General de Transferencia de Energía . . . . .	30
2.4.2	Formas Especiales de la Ecuación Diferencial de Energía . . . . .	36
2.4.3	Ecuación General de Transporte. . . . .	39
2.4.4	Ecuaciones de gobierno . . . . .	42
2.4.4.1	Ecuación de Energía . . . . .	42
2.4.4.1	Ecuación de transferencia de calor . . . . .	43

<b>III</b>	<b>Método de la Capacitancia de Volumen de Control</b>	
3.1	Introducción a la Modelación de Solidificación . . . . .	45
3.2	Repaso de Teoría . . . . .	47
3.3	Capacitancia . . . . .	49
3.3.1	Capacitancia de Calor Aparente. . . . .	51
3.3.2	Capacitancia de Calor Efectiva. . . . .	53
3.3.3	Método Basado en una Fuente. . . . .	53
<b>IV</b>	<b>Métodos de Discretización</b>	
4.1	Método del Elemento Finito . . . . .	54
4.1.1	Aproximación Galerkin de Residuos Ponderados. . . . .	60
4.1.2	Método de Diferencias Finitas. . . . .	66
4.1.3	Método de Volumen de Control. . . . .	71
4.1.4	Ecuaciones de Transporte . . . . .	73
4.2	Procedimiento de Integración . . . . .	76
4.2.1	Integrales de Relaciones de Entalpía . . . . .	77
4.2.2	Campos de las Integrales de temperatura . . . . .	78
4.3	Integración Directa en el Tiempo . . . . .	79
4.4	Estabilidad, Precisión y Divergencia . . . . .	83
4.5	Procedimiento Numérico . . . . .	87
4.5.1	Formulación del Elemento Finito . . . . .	87
4.5.2	Discretización de la Ecuación de Calor por el Método Explícito . . . . .	90
4.5.3	Discretización de la Ecuación de Calor por el Método Implícito . . . . .	95
4.5.4	Formulación Lagrangiana-Euleriana (ALE) . . . . .	98
4.6	Discretización del (MCVC-Convencional) . . . . .	105
4.7	Solución Numérica . . . . .	110
<b>V</b>	<b>Método de Capacitancia de Volumen de Control Modificado (MCVC-M)</b>	
5.1	Resumen . . . . .	112
5.2	Coeficientes del MCVC-M . . . . .	114
5.3	Discretización del MCVC-M . . . . .	120
5.4	MCVC-M Para la Transferencia de Calor en estado Transitorio sobre un Dominio Semi Infinito con un Número de Peclet Alto. . . . .	126
<b>VI</b>	<b>Pruebas Numéricas</b>	
6.1	Análisis de Oscilaciones . . . . .	132
6.2	Análisis de la Capacitancia de Volumen de Control. . . . .	135

6.3	Transferencia de Calor Convectivo-Difusivo Transitorio sobre un Dominio Semi-infinito en 1-D . . . . .	138
<b>VII</b>	<b>Resultados</b>	
	Resultados Obtenidos. . . . .	143
<b>VIII</b>	<b>Conclusiones</b>	
	Conclusiones del MCVC-M. . . . .	163
	REFERENCIAS. . . . .	166
	NOMENCLATURA. . . . .	176
	APÉNDICE. . . . .	181

## **AGRADECIMIENTOS**

Esta tesis, la dedico agradeciendo en primera instancia a Dios que me da la vida y permite pensar en mi destino.

A mis padres, Luis y Catalina por haber sido las personas a quien más quise, respete y admire, por haberme dado la mejor educación y orientación hasta el final de su existencia, lo que me colocó en una situación de deuda infinitamente hasta el final de sus días, descansen en paz.

A mis hermanos, Javier, Raquel, Salvador, Rasa María, Enrique y Armando por su apoyo y por creer siempre en mí, para que este trabajo sirva como estímulo de superación, comprobando una vez más que podemos llegar tan lejos como las metas que nos proponemos, siendo libres de decisión, siempre que Dios nos lo permita.

A mi Esposa Sandra por su amor y paciencia mostrados durante todo este tiempo que llevamos juntos. Tus sacrificios y tu confianza en mí siempre los tendré presentes, mil gracias ya que sin tu ayuda no podría llegar a ninguna parte.

A mis hijos Christopher y Andre que ahora son la razón de mi vida, siendo esta tesis un ejemplo para su futura formación.

## **RECONOCIMIENTOS**

Al Ing. Ángel Ramírez Vázquez le doy las gracias, por haberme inculcado en su momento a superarme después de haber obtenido mi título de Licenciatura, el cual fue el primer peldaño en mi vida profesional. Gracias por ser un gran amigo, y por brindarme su confianza para poder llegar a culminar otro peldaño mas a lo largo de mi vida profesional.

Al Dr. Nicolás Juárez Rodríguez le doy mil gracias, primero por ser un gran amigo, y después por ser mi asesor y director de proyecto, por compartir sus conocimientos, por brindarme su confianza y por su apoyo incondicional en la realización de mi tesis.

Al Dr. Sebastián Díaz de la Torre mi mas sincero reconocimiento por ser un gran amigo quién me apoyó en la conformación de esta tesis y además por creer e infundar en mi el deseo de mayor conocimiento, además quiero darle las gracias por su apoyo incondicional cuando mas lo necesite en un momento crítico de mi estancia en Japón. Ya que por medio de sus consejos fue que pude afrontar y llevar a un feliz término mi curso de entrenamiento en ese país. Gracias también Sebastián por ayudarme a preparar la presentación de esta tesis profesional.

Al Dr. Luis del Llano Vizcaya mi mas sincero agradecimiento a un amigo que conozco desde la Licenciatura y a quien agradezco su confianza y su apoyo incondicional para seguir adquiriendo mas conocimiento, gracias a eso estoy hoy presentando esta tesis.

Al Dr. Carlos Rubio González mi mas sincero reconocimiento primeramente por ser un gran amigo y posteriormente por ayudarme e inculcarme el deseo de superación profesional, de no ser por ello, tal vez no me encontraría el día de hoy presentando esta tesis.

Al M. en C. Mauricio Villanueva Castillo mi mas sincero reconocimiento por tener la paciencia y esmero en enseñarme lo relacionado al Volumen de Control, ya que de no ser por su ayuda y sus consejos yo no estuviera aquí hoy presentado mi tesis de Doctorado.

Al M. en I. José Alfredo Manzo Preciado le agradezco su confianza, sus aportaciones y por compartir conmigo sus conocimientos los cuales me brindó en el transcurso y desarrollo de todo mi trabajo profesional, gracias Alfredo.

Hago patente mi agradecimiento a la institución que me ha formado no solo como profesionista sino como persona, al Postgrado Interinstitucional de Ciencia y Tecnología (PICYT), del CENTRO DE INGENIERIA Y DESARROLLO INDUSTRIAL (CIDESI).

A mis compañeros y amigos que de alguna u otra manera apoyaron mi formación profesional desinteresadamente.



005461

# *Capítulo Uno*

## **INTRODUCCIÓN**

---

### **1.1 Resumen**

En la actualidad hay una infinidad de trabajos concernientes al estudio sobre transporte de masa y energía. Para la modelación de la solidificación fue necesario acoplar una aproximación de Volumen de Control (CV) y el Método de Elemento Finito (MEF). El primer método es usado para determinar una capacitancia equivalente capaz de describir el transporte de energía mientras que el segundo método proporciona una temperatura sobre el dominio del material. La modelación de solidificación es usada como una herramienta para ayudar en el análisis y eliminación de los defectos de manufactura que se llevan a cabo durante el vaciado de los semi-sólidos. El tamaño de grano y otras formas micro-estructurales tales como la morfología de fase son factores primarios para determinar las propiedades mecánicas de los materiales. Para considerar el efecto de velocidad en una modelación de solidificación, un modelo de deformación numérica basado en la formulación de flujo es presentado. La deformación del material es discretizada usando elementos tetraédricos sub-paramétricos. El punto principal de la implementación de los elementos sub-paramétricos es permitir el acoplamiento entre la deformación y los modelos numéricos térmicos. Para determinar la temperatura sobre el

dominio del material, la formulación del MEF para transferencia de calor por conducción es descrita.

Para explicar la modelación de solidificación con transporte de masa, un nuevo Método de Capacitancia de Volumen de Control es presentado en este trabajo. Esta aproximación está fundada en la teoría que describe la transferencia de energía a través de un volumen de control. Una ecuación diferencial parcial equivalente de gobierno es establecida y diseñada para ser transformable dentro del MEF que es comúnmente usado para modelar problemas de conducción de calor transitorio. Esta aproximación evita la necesidad de usar métodos convencionales de convección y elimina algunos problemas de estabilidad asociados con estas aproximaciones. En éste trabajo se propuso un esquema de integración que abastezca exactamente a los flujos de entalpía generados por el transporte de masa.

Se presenta en este trabajo el desarrollo y la aplicación del Método de Capacitancia para problemas donde la deformación visco plástica y la solidificación son combinadas. Dicha aproximación adoptada está fundada sobre la teoría del Volumen de Control. Esencial mente fue usado el Método Arbitrario Lagrangiano-Euleriano (ALE), que facilito el tratamiento de las discontinuidades propuestas. La discretización del dominio del material es llevada a cabo usando elementos sub-paramétricos, como funciones de forma tetraédricas, cuadráticas y lineales, las funciones de forma lineales son usadas para determinar velocidad y temperatura respectivamente. Las ecuaciones gobierno de transporte son reemplazadas por ecuaciones equivalentes propuestas que utilizan variables no físicas. Estas variables son no físicas en el sentido de que dependen sobre la velocidad del movimiento del VC. Esta dependencia es una consecuencia de la construcción de las ecuaciones de transporte que no incluyen integrales de flujo. La forma de las ecuaciones de transporte facilita la construcción de una nueva formulación por el MEF aplicable a problemas de transporte de masa y calor, la cual carece de singularidades presentes en el cambio de fase. La nueva formulación del MEF es aplicable a procesos transitorios de extrusión con cambio de fase, para demostrar la aplicabilidad de lo dicho en la teoría.

Los resultados son presentados después de haber obtenido la solución numérica de la ecuación diferencial parcial mediante un método codificado con la ayuda del software de MAT-LAB 7.0.1 (R14), el cual se implemento en una computadora Dell Precisión Modelo 670 Work Station, con un microprocesador Intel Xeon de 3.6 GHz y 2 Gb de memoria RAM. Donde la codificación desarrollada fue para comparar los resultados numéricos obtenidos para la ecuación diferencial parcial de calor usando el Método de Capacitancia de Volumen de Control (MCVC) Convencional y Modificado.

## 1.2 Justificación

La modelación de transferencia de calor sobre un dominio de transporte requiere métodos más eficientes y exactos. Esto es de primordial importancia en la comunidad de transferencia de calor. Por ejemplo la formación semi-sólida, el vaciado en un dado, la solidificación, y otros procesos relacionados con transferencia de calor. Recientemente, se ha descubierto el Método de la Capacitancia de Volumen de Control (MCVC) donde los efectos de la convección son incorporados dentro del término de Capacitancia.

Este trabajo se centra en el desarrollo y en las validaciones del Método de Capacitancia del Volumen del Control Modificado (MCVC-M) para los problemas donde se combina el transporte y solidificación de masa. La aproximación adoptada se funda en la teoría que describe una transferencia de energía a través de un Volumen de Control (CV) con movimiento relativo al transporte de masa. Una ecuación diferencial parcial de gobierno es establecida, la cual esta diseñada para ser transformable dentro de un sistema de elemento finito que es comúnmente utilizado para modelar problemas de conducción del calor. Esta aproximación evita la necesidad de usar los métodos de Bubnov-Galerkin y de Petrov-Galerkin y eliminar así muchos de los problemas de estabilidad asociados a estos acercamientos. El Método Modificado elimina los problemas de inestabilidad conocidos como oscilación numérica inducida, cuando velocidades negativas son aplicadas. Desafortunadamente, cuando se usan velocidades grandes positivas, disminuye el término de capacitancia. Entonces, la capacitancia puede cruzar dicha línea que divide el cero y las matrices singulares pueden presentarse. El punto principal de este trabajo es presentar el MCVC-M para eliminar esta desventaja.

Pruebas numéricas en 1-D fueron realizadas para validar el código. La solución encontrada por el MCVC- M fue comparada con el esquema numérico convencional y su solución analítica. El uso de esta aproximación de Volumen del Control asegura que los campos de temperatura predeterminados correspondan exactamente con la ecuación de flujo de la energía transitoria y proporcionan una formulación extremadamente estable.

### 1.3 Objetivos

- Establecer una formulación llamada Método de Capacitancia de Volumen de Control Modificado que pueda proporcionar resultados numéricos confiables para problemas difusivos - convectivos.
- Desarrollar un algoritmo que nos permita evaluar el nuevo método propuesto para pequeñas velocidades tanto positivas como negativas, evitando inestabilidad y obteniendo soluciones libres de oscilaciones.

### 1.4 Estado del Arte

La incorporación de solidificación dentro de los problemas de convección-difusión añaden otra dificultad más con el incremento de potencial para su inestabilidad numérica y error. El modelado de solidificación puede ser caracterizado como cualquiera de los dos dominios siguientes: *fijos o móviles* [1]. Los métodos de dominio móvil están a menudo restringidos a problemas de una sola dimensión, o aquellos en donde su solidificación es de una forma relativamente muy simple. Sin embargo, el tratamiento de discontinuidades del material durante dicha solidificación sugieren que éste método es superior.

Los métodos de dominio fijo son relativamente más fáciles de implementar, pero presentan dificultades de discontinuidad, por ejemplo, pérdida de precisión y de estabilidad numérica. Existen cuatro métodos de dominio fijo los cuales son: *entalpía* [2-5], *capacitancia* [6-10], *flujo de calor ficticio*[11-12] *técnicas de recuperación de la temperatura* [13]. Una buena recopilación de éstos métodos que se mencionaron anteriormente se pueden consultar en Voller [14] y Dalhuijsen [15].

La modelación de solidificación con convección por el MEF presenta dificultades considerables. Los problemas de convección-difusión han sido sujetos a un intenso estudio en las últimas dos décadas [16-20]. Dos métodos comúnmente aplicados en modelación de problemas con convección son: Buvnov-Galerkin y Petrov-Galerkin [21-22]. El método Buvnov-Galerkin estándar utiliza parámetros ponderados, mientras que el Petrov-Galerkin utiliza parámetros Up-wind.

La solución de la ecuación de convección-difusión por el Método de Elemento Finito Galerkin estándar (también llamada el Método de Buvnov-Galerkin) es conocido por su oscilación numérica para valores del número de Peclet mas grandes a uno [23]. El número de Peclet es el radio de transporte advectivo a difusivo (denotado por  $Pe = vL/\alpha$ , donde el termino  $\alpha$  es la difusividad del material). Un gran número de esquemas numéricos han sido propuestos en orden para prevenir inestabilidad numérica, esto es, que la oscilación tiene un significado físico. Primeramente se procura resolver este problema bajo un carácter difusivo por el Método de Elemento Finito Galerkin (esquema análogo de Diferencias Finitas Centrales) los problemas convectivos-difusivos fueron corregidos agregando “términos adicionales de difusión” a las ecuaciones de gobierno [23-24]. La relación de ésta aproximación con el Método de Diferencias Finitas Upwind [24], nos lleva a la derivación Petrov-Galerkin que es una variedad del Método de Elemento Finito. Todos estos métodos pueden ser interpretados como una extensión de la forma variacional del Método de Elemento Finito Galerkin estándar. Agregando los términos integrales residuales basados en los cálculos sobre el dominio del elemento.

Muy pocos trabajos hasta el día de hoy han sido hechos sobre este problema, aunque un número de investigadores han estado resolviendo problemas de convección-difusión. El método de aproximación estándar Buvnov-Galerkin se utiliza para modelación de solidificación [25]. En el trabajo realizado por K. Davey [10] donde se muestran considerables errores que resultan de transferencia de energía, a menos que su ecuación de flujo de energía en estado inestable para cada elemento sea satisfecha. Algunos de los métodos arriba mencionados simplemente fallan o funcionan mal cuando una discontinuidad está presente, como es el caso de solidificación en aleaciones puras. Esto

combinado con la dificultad de una determinación óptima de los parámetros Upwind, en el método de Petrov-Galerkin se requiere de un nuevo método.

El problema sobre termo-visco-plasticidad, ha sido sujeto a un profundo estudio en las últimas dos décadas [23-26 y 27]. Éste es un problema muy importante en algunos materiales de comportamiento visco-plástico; por ejemplo, en los metales a altas temperaturas, los vidrios y los polímeros. Dentro de una modelación del formado de los metales, ésta consideración debe ser alcanzada para su disipación de la potencia como un resultado del proceso de deformación y su efecto sobre el campo de temperaturas. Sin embargo, tales efectos pueden ser a menudo pequeños cuando son considerados materiales semisólidos, y pueden ser omitidos. Todo el análisis descrito arriba está principalmente fundado sobre una descripción Euleriana con excepción de la deformación del metal, el cual tiene una componente Lagrangiana. Ha sido mostrado recientemente que un tratamiento de discontinuidades da un mejor resultado con un marco Arbitrario Lagrangiano-Euleriano (ALE) [28-29].

Este trabajo solo se enfoca macros-cópicamente en la modelación de la solidificación sobre un dominio que está sujeto a una deformación visco-plástica, con una particular atención enfocada al tratamiento de discontinuidades. Se asume que ambas partes del líquido y del sólido están descritas por la misma formulación del flujo visco-plástico. Esto restringe el análisis a problemas tales como; el forjado de semisólidos donde cambios relativamente lentos en la velocidad están presentes, de modo que el término inercial puede ser razonablemente ignorado. Es común en alguna literatura derivar las ecuaciones de gobierno para solidificación y modelación del flujo, adoptando cualquiera de los dos marcos de referencia el Euleriano o el Lagrangiano. Esas aproximaciones están descritas en la sección 4.4.3. Donde se muestra sin embargo que, las aproximaciones estándar Euleriana y Lagrangiana, fallan al describir la física del fenómeno de transporte de su entalpía cuando una discontinuidad está presente. Una nueva formulación es descrita en la sección 5, dicha formulación facilitará la descripción del transporte a través de un Volumen de Control (VC), moviéndose y deformándose cuando está solidificando.

Los métodos de capacitancia son métodos populares usados para modelación de solidificación, un buen repaso de ésta técnica de capacitancia clásica está dado por Stuart Bounds [9]. Desafortunadamente, sufren de una desventaja mayor ya que su energía no es correctamente transportada a través de los elementos y de éste modo se proporciona una inexactitud. Por lo que una ecuación diferencial parcial de gobierno equivalente es establecida, y además está diseñada para ser transformada en un sistema de elementos finitos que es comúnmente usado en modelos transitorios de problemas de conducción de calor.

La dificultad matemática de ésta ecuación de convección-difusión surge cuando su difusión es muy pequeña y los métodos de segundo orden clásicos son considerados para ello, algunos puntos de la malla son necesarios para obtener soluciones razonables. Para evitar ésta limitación, métodos de alto orden deben ser considerados. Métodos numéricos, tales como Diferencias Finitas [30], Diferencias Finitas Compactas [31], Volumen Finito, o los Métodos estándar de Elemento Finito de Galerkin son utilizados para resolver la ecuación de convección-difusión. El comportamiento de los materiales semisólidos durante su deformación es compleja y puede ser dominado por varios mecanismos que incluyen: 1) Flujo líquido, 2) Flujo líquido incorporando partículas sólidas, 3) Deslizamiento entre partículas sólidas y 4) Deformación visco-plástica [32-33].

Los parámetros Upwind son requeridos para prevenir numéricamente las oscilaciones inducidas, que son predominantes con la aproximación Bubnov. Un número de técnicas están disponibles para estabilizar las ecuaciones de difusión-convección, como pudieran ser: Upwind / Petrov-Galerkin, Difusión racionalizada, Funciones Burbuja [34], y el de Malla secundaria [35]. Los métodos de malla secundaria, son generalmente empleados para cumplir con la conservación de cantidades que están presentes en los sistemas continuos que pueden ser perdidos durante dicha discretización.

Esta tesis está centralizada en el desarrollo y en la aplicación de un nuevo MCVC, el cual es presentado para resolver una ecuación de convección-difusión, además de problemas donde el transporte de masa y de solidificación están combinados, para lo

cual, los métodos de Buvnov y Petrov son abordados en su forma simple, donde a su vez involucra la incorporación del término capacitancia  $c^* = d\bar{h}/dT$ , además, del fenómeno de transporte convectivo dentro de un volumen de control, donde  $\bar{h}$  es la entalpía volumétrica.

A menudo,  $\bar{h}$  puede ser discontinua y esto en el mejor de los casos podría traer problemas para determinar  $c^*$ . Aunque a primera vista esto debe parecer bastante difícil de entender,  $c^*$  es seleccionada para satisfacer a la ecuación de flujo de energía en estado inestable.

El objetivo de este trabajo es desarrollar un algoritmo que nos permita evaluar el nuevo método propuesto para pequeñas velocidades tanto positivas como negativas, evitando inestabilidad y obteniendo soluciones libres de oscilaciones. Como sabemos, en los esquemas numéricos, los coeficientes del sistema de ecuaciones algebraico saltan de positivo a negativo o viceversa. En las siguientes referencias se describe una completa revisión relacionada a soluciones numéricas de problemas perturbados singularmente [36-38]. La discretización de una ecuación diferencial de gobierno es a través de la formulación del Elemento Finito usando el método de residuos ponderados [39], los cuales involucran los valores de solución sobre volúmenes de control. Una vez que dicha discretización está hecha, el arreglo resultante de las ecuaciones algebraicas para los valores promedio son resueltas por el método de Broyden.

Está demostrado en este documento que grandes fluctuaciones de energía están presentes con los métodos de capacitancia actualmente establecidos. Por lo cual, para superar éste problema es presentado el nuevo MCVC-M. Como un resultado del MCVC-M, las soluciones resultantes están libres de los problemas de inestabilidad. La aproximación encontrada es comparada con su solución analítica [1,40]. Los esquemas numéricos son usados para proporcionar dicha validación del código. Una introducción en el cálculo de solución de algunas ecuaciones de gobierno pueden ser encontradas en [41-42].

Las ecuaciones de gobierno están revisadas en el capítulo 2, para reforzar el hecho de que para una solidificación precisa se requiere que los cambios en la entalpía sean



derivados con respecto a su masa y con respecto a su volumen. Esto había sido parcialmente evadido por aproximaciones numéricas y resultados satisfactorios habían sido obtenidos [6-8, 11-14]. Sin embargo, Dalhuijsen y Segal [15] notaron que éstas aproximaciones numéricas son restringidas en intervalos de tiempo y esto es susceptible para producir oscilaciones. Algunas técnicas diseñadas para retardar este problema de las oscilaciones son los volúmenes finitos [43]. El método de bisección es aplicado al de capacitancia para mejorar su convergencia. Los perfiles de temperatura son actualizados después de cada intervalo de tiempo. El procedimiento está disponible ampliamente y es sencillo de entender [7]. La principal dificultad numérica es quedarse en una discretización espacial, que puede hacerse inestable haciendo que los errores espaciales crezcan sin límite.

Las condiciones de estabilidad han sido dadas por medio de los eigen-valores de la matriz de discretización o por el criterio de Von Neumann [44-48]. Si la estabilidad asintótica es segura, lo cual significa que los eigen-valores de su matriz de discretización multiplicados por el paso en el tiempo, están dentro de una región de absoluta estabilidad dentro del esquema temporal [49], por lo que el estado estable puede ser obtenido correctamente. Sin embargo, aunque una estabilidad asintótica es segura, sus simulaciones numéricas muestran que el error transitorio algunas veces es amplificado enormemente [45, 50, 51]. Los errores transitorios pueden ser analizados fácilmente por medio del espectro de la matriz de discretización espacial [52,53].

Entre los muchos métodos de estabilización tenemos: el MEF Upwind [21,54], el Método Aerodinámico Upwind Petrov-Galerkin (SUPG), y el método de la Presión de Estabilización Petrov-Galerkin (PSPG); para los fluidos incompresibles [55-59] están algunos de los métodos de estabilización más frecuentes como: el Método Taylor-Galerkin [60,61], el Método Galerkin Generalizado [62,63], el Método de Mínimos Cuadrados Galerkin [64-66], y las aproximaciones relacionadas: el Método Característico Galerkin [67,68], cuya característica está basada en el método Split [69], y el método escala de la sub-malla [70-73], el método de burbujas libres residuales [74], el Método de Enriquecimiento Discontinuo [75], el Método Aerodinámico Upwind con Términos en la Frontera [76], los esquemas llamados “capturando sacudidas” o

“capturando discontinuidades” [82-86], y la aproximación del Cálculo Finito (FIC) dicha aproximación está basada en la expresión de la ecuación de balance de flujo en un dominio de tamaño finito [87,88]. Es interesante notar que muchas de las estabilizaciones en el MEF pueden ser recuperadas usando el método FIC. El método FIC ha sido aplicado satisfactoriamente a problemas de convección-difusión [87-91], absorción en la convección-difusión [92,93], en el flujo de fluidos incompresibles [94-97], y la mecánica de sólidos incompresibles [98,99].

Básicamente todos los métodos hacen uso de un solo parámetro de estabilización, el cual es suficiente para estabilizar la solución numérica a lo largo de la velocidad (aerodinámica). El cálculo de éste parámetro de estabilización se conoce como “ $\tau$ ”, para problemas multidimensionales esta usualmente basado sobre extensiones del valor óptimo de los parámetros para el caso simple en 1-D.

Esto implica una medición de la longitud local a escala y otros parámetros tales como el elemento de Reynolds y los números de Courant. Varias longitudes del elemento y los “ $\tau$ 's” fueron propuestos en las referencias [55,56,100,101], posteriormente se proporciona una breve introducción [86], donde esas propuestas fueron basadas en los métodos SUPG reportados subsecuentemente.

Tentativos resultados específicos para diseñar el parámetro de estabilidad en problemas multidimensionales dentro del contexto de la formulación de Petrov-Galerkin han sido reportados recientemente [77-81]. El Método de Elemento Finito clásico es el método más popular de estabilización, para problemas convectivos-difusivos es el método SUPG, los cuales han sido aplicados satisfactoriamente a muchas situaciones diversas [54,56,65]. El método consiste en adicionar un término constante que proporcione una difusión adicional en la dirección aerodinámica. La cantidad de tal difusión adicional es contemplada por el parámetro “ $\tau$ ” que debe de ser elegido de manera conveniente. Varias sugerencias han sido propuestas para la selección del “ $\tau$ ” [102]. El método ha demostrado tener una base matemática sólida en varios casos de interés práctico [55,56,77]. Sin embargo, la necesidad de un conveniente argumento para dirigir la selección de “ $\tau$ ” es considerada todavía como una desventaja importante del método

por varios usuarios. Otro defecto mayor del método Petrov es que el ajuste de los parámetros  $upwind$  no son conocidos *a priori* [28]. Por otra parte los métodos Petrov son conocidos para agravar las bien conocidas inexactitudes en los resultados cuando el número de Peclet es más bajo de uno. Un número limitado de soluciones analíticas están disponibles para los problemas convectivos-difusivos de transferencia de calor. Estas están sobre todo para el sólido semi-infinito el cual se mueve con velocidad  $v$  a lo largo del eje  $x$  y tiene varias condiciones superficiales en la frontera  $x = 0$ , Las velocidades positivas corresponden a un medio de acrecentamiento (por ejemplo un campo el cual esta siendo atacado por constantes caídas de nieve). Los valores negativos de las velocidades corresponden a la remoción del material en  $x = 0$  por la erosión o procesos similares.

Desafortunadamente los problemas pueden ocurrir para el medio de acrecentamiento cuando la convección domina el proceso de la difusión. Las inestabilidades numéricas son un resultado común. El punto medular de éste trabajo es desarrollar una formulación llamada el MCVC-M, el cual pueda proporcionar resultados numéricos estabilizados para problemas convectivos-difusivos. Dicha formulación se basa en el acercamiento del Volumen de Control eliminando la necesidad de emplear parámetros “ $\tau$ ” de estabilización. Por otro lado, la difusión adicional es incorporada dentro del término de capacitancia. Para demostrar la aplicabilidad de este método, la transferencia de calor convectiva-difusiva transitoria se lleva a cabo en el dominio semi-infinito clásico para 1-D. Actualmente con el incremento en capacidad de las computadoras, más o menos en los últimos 10 años, permitió algunas simplificaciones [103], esto es contar siempre con un modelo numérico final para obtener una solución numérica precisa y eficiente. Básicamente, una resolución superior sobre el dominio de ésta discretización nos podría dar una mejor precisión numérica de la solución, pero también demandaría más tiempo de computadora. Algunos métodos han sido propuestos para conducir varios tipos de problemas, efectivamente sin llegar a perder su precisión.

Por ejemplo, el método multi-malla y descomposición del dominio han sido empleados para resolver ecuaciones parciales del tipo elíptico, cuando en una alta resolución de dicha malla fue tomada en cuenta la Aproximación Lagrangiana-Euleriana (ALE)

[104,105], la cual ha sido bien usada para problemas de transporte con dominio advectivo [106-107]. Por otro lado, la aproximación (ALE) tiene bien demostrada su efectividad para resolver ecuaciones del fenómeno de transporte de advección-difusión desde las dos pasadas décadas [106,107,108,109], donde su ecuación diferencial parcial es difícil de resolver debido a una mezcla natural hiperbólica-parabólica.

## **1.5 Organización de la Tesis**

### **CAPITULOS**

#### **1. INTRODUCCIÓN**

En éste capítulo se proporciona una breve descripción del trabajo de investigación realizado, se enlistan los objetivos que se pretenden lograr, además se describe el estado del arte de investigaciones realizadas anteriormente las cuales están relacionadas con nuestro tema de investigación.

#### **2. CONCEPTOS**

En este apartado, se describen algunos de los conceptos más importantes sobre transferencia de calor, inestabilidad, métodos explícito e implícito, convección y difusión. Estos conceptos constituyen la base del conocimiento general sobre las ecuaciones de transferencia de calor.

#### **3. METODO DE CAPACITANCIA DE VOLUMEN DE CONTROL**

Esta sección se describen algunos de los conceptos básicos sobre solidificación, así como los diferentes métodos para determinar la capacitancia de un material.

#### **4. METODOS DE DISCRETIZACIÓN**

En este punto se presentan los diferentes métodos para la discretización de las ecuaciones de transferencia de calor, como podríamos mencionar: el método de MEF, la aproximación Galerkin, las Diferencias Finitas y el Volumen de Control; además de una descripción de la Formulación Variacional. También se describe la forma de obtener una solución para un tiempo  $t$  mas el intervalo de tiempo finito  $\Delta t$ . También se mencionan los conceptos de estabilidad, preescisión y divergencia parámetros muy importantes a la hora de obtener la solución numérica por los diferentes métodos

mencionados. Finalmente, se presenta la discretización del MCVC. Estos conceptos serán aplicados en el análisis numérico, para un mejor entendimiento acerca de la capacitancia y su comportamiento.

## **5. VOLUMEN DE CONTROL**

En este punto, se presenta una descripción del MCVC-M, una formulación de sus coeficientes así como la discretización del MCVC-M. También se presenta una breve descripción de la transferencia de calor para una fase con el MCVC-M. Lo anteriormente descrito, es la base fundamental de este trabajo, el cual además está basado en la obtención de una solución numérica del MCVC-M libre de oscilaciones.

## **6. PRUEBAS NUMERICAS**

El punto principal de esta sección es evaluar el término capacitancia combinando transporte de masa y transferencia de calor sobre un dominio semi-infinito en 1-D para varios números de Peclet. El número de Peclet es el ratio de transporte advectivo a difusivo. Las pruebas numéricas que fueron realizadas son las siguientes: Análisis de oscilación, Análisis de la capacitancia del volumen de control y el Análisis de transferencia de calor convectivo-difusivo inestable sobre un dominio semi-infinito en 1-D.

## **7. RESULTADOS Y DISCUSIÓN**

En este espacio, se muestra una comparación de los diferentes resultados numéricos obtenidos para diferentes velocidades tanto positivas como negativas, tanto para el MCVC-Convencional como para el MCVC-Modificado.

## **8. CONCLUSIONES**

Para simplificar el problema se tomó como marco de referencia el enfoque Euleriano. Una de las principales ventajas de este método es que las ecuaciones resultantes por discretización del Elemento Finito son similares a las ecuaciones de transferencia de calor por conducción pura, por lo que el sistema conserva la simetría en el conjunto de ecuaciones algebraicas y es fácil de implementar en un código estándar de Elemento Finito.

Esta discretización se deriva directamente de la formulación clásica de Galerkin en su forma implícita, la cual presenta singularidades cuando se presentan velocidades muy grandes positivas. Para eliminar este problema, las ecuaciones de Elemento Finito fueron reformuladas, lo que deriva en un nuevo Método de Capacitancia de Volumen de Control. Las pruebas numéricas mostraron que la aproximación MCVC-M se convierte en un sistema bien condicionado para velocidades no muy grandes positivas.

# Capítulo Dos

## ANTECEDENTES

---

### 2.1 El Término Inestable

Consideremos la Ecuación de conducción de calor transitoria en 1-D sin fuente de generación de energía:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) \quad (2.1)$$

Más adelante, por conveniencia, asumiremos que  $\rho c$  es constante. Por lo que obtendremos la solución de una distribución inicial de temperatura dada al paso del tiempo. Por consiguiente, en un típico “paso en el tiempo” la tarea es ésta: dados los valores de los puntos de la malla  $T$  en un tiempo  $t$ , encontrar los valores de  $T$  en  $t + \Delta t$ . Los valores “viejos” dados de  $T$  en los puntos de la malla serán denotados por  $T_p^n, T_E^n, T_W^n$  y los “nuevos” valores (desconocidos) en el tiempo  $t + \Delta t$  por  $T_p^{n+1}, T_E^{n+1}, T_W^{n+1}$ .

La discretización de la ecuación es derivada ahora integrando la Ecuación (2.1) sobre el volumen de control mostrado en la Figura 2.1 y sobre el intervalo de tiempo  $t$  a  $t + \Delta t$ , de esta manera,

$$\rho c \int_w^e \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial T}{\partial t} dt dx = \int_t^{t+\Delta t} \int_w^e \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx dt \quad (2.2)$$

donde el orden de integración es elegido de acuerdo a la naturaleza del término. Para el término  $\partial T/\partial t$ , podemos asumir que los valores de los puntos de la malla  $T$  prevalecen a través del volumen de control. Para el término  $k \partial T/\partial x$  seguiremos con un práctico estado estable, para obtener:

$$\rho c \Delta x (T_p^{n+1} - T_p^n) = \int_t^{t+\Delta t} \left[ \frac{k_e (T_E - T_p)}{(\delta x)_e} - \frac{k_w (T_p - T_w)}{(\delta x)_w} \right] dt \quad (2.3)$$

Es en éste punto que necesitamos hacer una suposición de mas o menos como es que  $T_p$ ,  $T_E$  y  $T_w$  varían con respecto al tiempo de  $t$  a  $t + \Delta t$ . Algunas suposiciones son posibles, y algunas de ellas pueden ser generalizadas proponiendo que:

$$\int_t^{t+\Delta t} T_p dt = [f T_p^{n+1} + (1-f) T_p^n] \Delta t \quad (2.4)$$

donde  $f$  es un factor de ponderación entre 0 y 1. Usando formulas similares para las integrales de  $T_E$  y  $T_w$ , derivamos de la Ecuación (2.3)

$$\begin{aligned} a_p T_p &= a_E [f T_E + (1-f) T_E^n] + a_w^{n+1} [f T_w + (1-f) T_w^n] \\ &+ [a_p^n - (1-f) a_E - (1-f) a_w] T_p^n \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$a_E = \frac{k_e}{(\delta x)_e}, \quad (2.6a)$$



$$a_w = \frac{k_w}{(\delta x)_w}, \quad (2.6b)$$

$$a_p^n = \frac{\rho c \Delta x}{\Delta t}, \quad (2.6c)$$

$$a_p = f a_E + f a_w + a_p^n \quad (2.6d)$$

En esta Ecuación, los símbolos  $T_p^{n+1}$ ,  $T_E^{n+1}$  y  $T_w^{n+1}$  se refieren a los nuevos valores de  $T$  en el intervalo de tiempo  $t + \Delta t$ . Los diferentes valores de  $f$  pueden ser interpretados en términos de las variaciones  $T_p \sim t$  mostradas en la Figura 2.2. Si  $f = 0$ , tenemos un esquema explícito. El esquema explícito generalmente asume que el valor viejo de  $T_p^n$  predomina a lo largo del paso en el tiempo entero, excepto en  $t + \Delta t$ . En el otro extremo. Si  $f = 1$  el esquema es completamente implícito. Aquí nosotros estamos postulando que, en el tiempo  $t$ ,  $T_p$  de repente cae de  $T_p^n$  a  $T_p^{n+1}$  y entonces permanecen en  $T_p^{n+1}$  sobre el paso en el tiempo entero; por consiguiente, la temperatura durante el paso en el tiempo es caracterizada por un nuevo valor  $T_p^{n+1}$ . En medio de esos dos esquemas se encuentra el esquema Crank Nicolson, para lo cual tenemos que  $f = 1/2$ , empleando una variación lineal de  $T_p$ . Para el esquema explícito ( $f = 0$ ), la Ecuación (2.5) será:

$$a_p T_p = a_E T_E^n + a_w T_w^n + (a_p^n - a_E - a_w) T_p^n \quad (2.7)$$

Esto significa que  $T_p$  no está relacionado con otras incógnitas tales como  $T_E$  o  $T_w$ , pero es explícitamente obtenida en términos de las temperaturas conocidas  $T_p^n$ ,  $T_E^n$  y  $T_w^n$ . Este sistema es relativamente fácil de codificar, desde que las soluciones de las ecuaciones diferenciales no son necesarias. La conveniencia del esquema explícito es, sin embargo, compensar una serie de limitaciones. Realmente, para que sus coeficientes



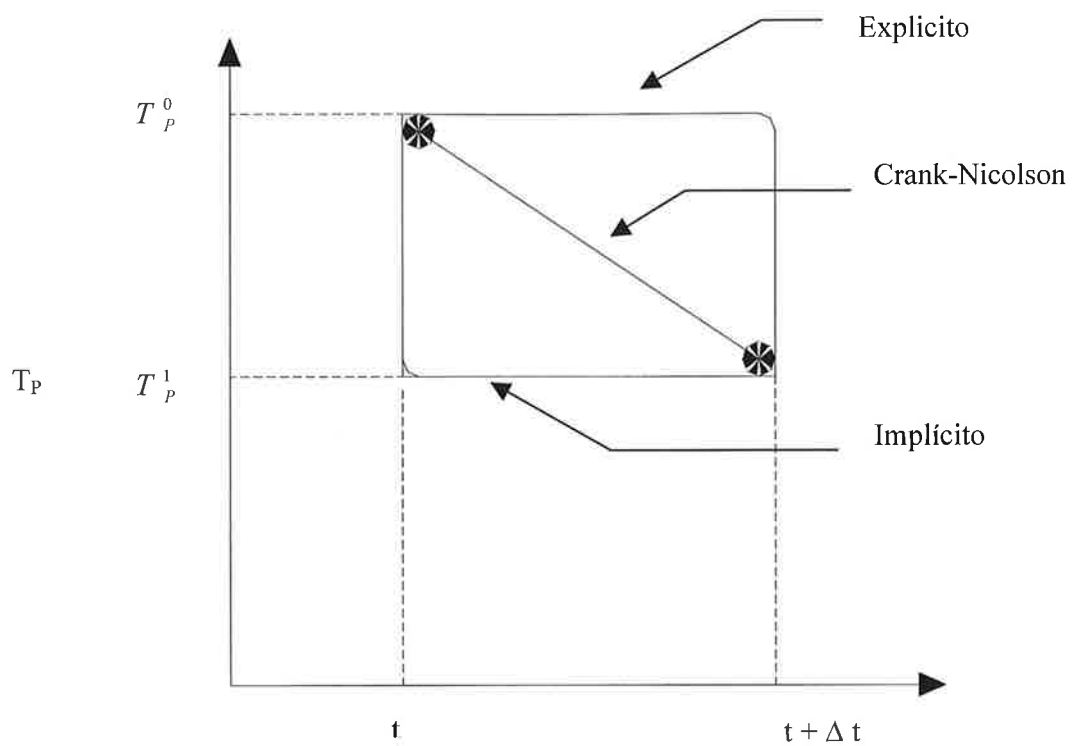


Figura 2.2 Variación de la temperatura con respecto al tiempo para tres diferentes esquemas.

## 2.2 Convección y Difusión

Hasta ahora, en la aparición de conducción de calor, hemos visto como formular la discretización de la ecuación diferencial general conteniendo el termino inestable, el término de la difusión y el termino fuente de generación de energía. Ahora agregaremos el término de convección. Asumiendo que en el campo del flujo ya es conocido, por cualquiera de los experimentos; una solución analítica o de otra fuente. Aunque la convección es solamente un término nuevo introducido en este capítulo ésta formulación no es muy sencilla. El término de convección tiene una inseparable conexión con el término de difusión y por consiguiente, los dos términos necesitan ser manejados como una unidad.

Aquí, vamos a considerar una situación en una dimensión en estado estable en la cual solamente los términos de convección y de difusión están presentes. Por lo que la Ecuación diferencial de gobierno es ahora:

$$\frac{d}{dx}(\rho u \Phi) = \frac{d}{dx} \left( \alpha \frac{d\Phi}{dx} \right) \quad (2.9)$$

donde  $\rho$  representa a la densidad,  $u$  representa la velocidad en la dirección de  $x$ ,  $\Phi$  representa una variable dependiente y  $\alpha$  representa al coeficiente de difusión térmica. La integración de la ecuación (2.9) sobre el volumen de control se muestra en la Figura 2.3, donde además tenemos la siguiente Ecuación:

$$(\rho u \Phi)_e - (\rho u \Phi)_w = \left( \alpha \frac{d\Phi}{dx} \right)_e - \left( \alpha \frac{d\Phi}{dx} \right)_w \quad (2.10)$$

Aunque la localización actual de las caras del volumen de control  $e$  y  $w$  podrían no influenciar nuestra formulación final, es conveniente asumir que  $e$  está localizada a la mitad entre los puntos  $P$  y  $E$ , y  $w$  está a la mitad de entre los puntos  $W$  y  $P$ . Nosotros representamos al termino  $\alpha d\Phi/dx$  del perfil lineal de la subdivisión para  $\Phi$  como en el caso de conducción de calor.

Para el término de convección, la misma selección del perfil podría en un principio parecer natural.

El resultado es

$$\Phi_e = \frac{1}{2}(\Phi_E + \Phi_P) \quad y \quad \Phi_w = \frac{1}{2}(\Phi_P + \Phi_W) \quad (2.11)$$

El factor 1/2 surge de la suposición de las interfaces comenzando a la mitad; algún otro factor de interpolación podría aparecer para diferencialmente localizar las interfases. Por lo que ahora la Ecuación (2.10) puede ser escrita como:

$$\frac{1}{2}(\rho u)_e(\Phi_E + \Phi_P) - \frac{1}{2}(\rho u)_w(\Phi_P + \Phi_W) = \frac{\alpha_e(\Phi_E - \Phi_P)}{(\delta x)_e} - \frac{\alpha_w(\Phi_P - \Phi_W)}{(\delta x)_w} \quad (2.12)$$

donde los valores de  $\alpha_e$  y  $\alpha_w$  son obtenidos por el significado de la formulación armónica anterior. Para hacer a la ecuación mas compactamente, definimos dos nuevos símbolos  $F$  y  $D$ , como sigue:

$$F \equiv \rho u, \quad D \equiv \frac{\alpha}{\delta x} \quad (2.13)$$

Ambas tienen las mismas dimensiones;  $F$  indica el esfuerzo de la convección (o flujo), mientras que  $D$  es la conductancia de la difusión. Esto debería notar que, mientras que  $D$  siempre permanece positiva,  $F$  puede tomar tanto valores positivos como negativos dependiendo de la dirección del flujo del fluido. Con los nuevos símbolos, la discretización de la ecuación se hace:

$$a_P \Phi_P = a_E \Phi_E + a_W \Phi_W, \quad (2.14)$$

donde

$$a_E = D_e - \frac{F_e}{2} \quad (2.15a)$$

$$a_w = D_w - \frac{F_w}{2} \quad (2.15b)$$

$$a_p = D_e + \frac{F_e}{2} + D_w - \frac{F_w}{2} = a_e + a_w + (F_e - F_w) \quad (2.15c)$$

La discretización de la Ecuación (2.14) representa las implicaciones de las subdivisiones lineales de los perfiles para  $\Phi$ . Ésta forma es también conocida como el esquema de Diferencia Centrales y es el resultado natural de una formulación de una serie de Taylor. Las Ecuaciones (2.15) indican que los coeficientes pueden, algunas veces llegar a ser negativos, con un posible resultado desastroso. Cuando  $|F|$  exceda  $2D$ , entonces, dependiendo de si  $F$  es positiva o negativa, hay una posibilidad de que  $a_e$  o  $a_w$  lleguen a ser negativas. Este es el porqué todos los primeros intentos para resolver problemas convectivos por el esquema de diferencias centrales fueron limitados a números bajos de Reynolds (por ejemplo, a valores bajos de  $F/D$ ).

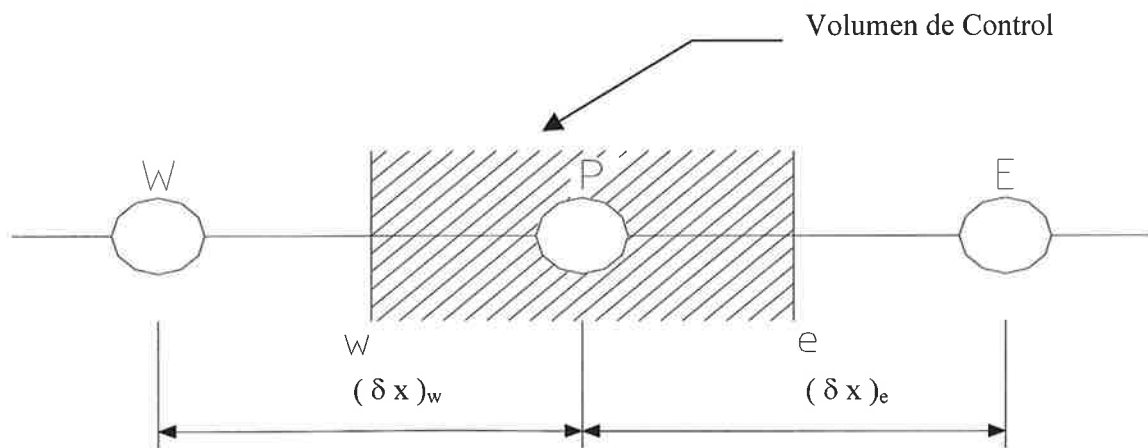


Figura 2.3 Grupo típico de puntos de malla para problemas de una dimensión

## 2.3 Sistemas Coordinados

En los sistemas coordinados de calor existen dos marcos arbitrarios comúnmente utilizados los cuales se conocen como marco *Lagrangiano* y *Euleriano* los cuales se emplean como métodos numéricos para resolver las ecuaciones. Un número considerable de algoritmos y métodos existen para la solución numérica de flujos de fluidos descritos por ecuaciones de Navier-Stokes. Estos algoritmos se pueden clasificar como algoritmos Eulerianos, Lagrangianos ó una mezcla de ambos. Primeramente hay que distinguir que en un esquema numérico Euleriano, generalmente, los movimientos del fluido no se relacionan con los movimientos de la malla. La ventaja principal de este método es que los nodos pueden experimentar una distorsión grande arbitrariamente sin pérdida de exactitud.

Además en la aproximación Euleriana, la ecuación de transporte se soluciona con un método fijo de malla tal como el método de diferencias finitas o elementos finitos. La aproximación Euleriana ofrece la ventaja y la conveniencia del manejo de una rejilla fija junto con problemas de dispersión /reacción con bastante eficacia. Para los problemas de advección existen muchas condiciones de campo, sin embargo, un método Euleriano es susceptible a la dispersión u oscilación numérica excesiva y además está limitado, a pequeños pasos en el tiempo de espaciamiento de la malla.

En cambio, la característica mas distintiva de los métodos Lagrangianos es que la malla se mueve con el material. Según éste método, cada partícula contiene siempre el mismo material en el elemento. Además en la aproximación Lagrangiana, la ecuación de transporte se soluciona de cualquiera de las dos formas siguientes: por la deformación de la malla o por la coordenada de deformación en una malla fija. La aproximación Lagrangiana proporciona una solución exacta y eficiente a problemas de advección. Sin embargo, con una malla o coordenada fija, un método Lagrangiano puede conducir a una inestabilidad numérica y a dificultades de cálculo en medios no uniformes con múltiples condiciones de límite complejas.

La aproximación Lagrangiana-Euleriana procura combinar las ventajas de ambos métodos Lagrangiano y Euleriano solucionando el término de la advección con el método Lagrangiano y los términos de la dispersión y reacción con un método Euleriano.



## 2.4 Deducción de la Ecuación de Transferencia de Calor

### 2.4.1 Ecuación Diferencial General de Transferencia de Energía

Analizaremos ahora el volumen de control cuyas dimensiones son  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ , y  $\Delta z$  que aparecen en la Figura 2.4. Por lo que si recordamos que la expresión de la primera ley de la termodinámica describe al volumen de control de la siguiente manera:

$$\frac{\delta Q}{dt} - \frac{\delta W_s}{dt} - \frac{\delta W_\mu}{dt} = \iint_{c.s.} \left( e + \frac{P}{\rho} \right) \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{c.v.} e \rho dV \quad (2.16)$$

$$\nabla \cdot \rho \mathbf{v} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (2.17)$$

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \rho \mathbf{g} - \nabla P + \mu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (2.18)$$

En seguida aparecen los términos individuales evaluados y la explicación de su significado. *La rapidez neta de calor* que se agregue al volumen de control incluirá todos los efectos de la conducción, la energía térmica neta liberada dentro del volumen de control, debido a una reacción química y la disipación de energía eléctrica o nuclear.

Los efectos de generación estarán incluidos en un solo término,  $\dot{q}$  que es la rapidez volumétrica de generación de la energía térmica, cuyas unidades son  $W/m^3$  o  $Btu/h \text{ ft}^3$ . Por lo tanto, el primer término puede expresarse así:

$$\begin{aligned} \frac{\delta Q}{dt} = & \left[ k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x+\Delta x} - k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_x \right] \Delta y \Delta z + \left[ k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{y+\Delta y} - k \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_y \right] \Delta x \Delta z \\ & + \left[ k \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z+\Delta z} - k \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_z \right] \Delta x \Delta y + \dot{q} \Delta x \Delta y \Delta z \end{aligned} \quad (2.19)$$

Para este propósito, el valor de la rapidez de trabajo viscoso o término de potencia que se tomará será de cero. Este término se relaciona específicamente con el trabajo realizado por algún efecto dentro del volumen de control, que en el caso diferencial, no se encuentra presente. El término que corresponde a la potencia, por lo tanto, se calcula de la manera siguiente:

$$\frac{\delta W_s}{dt} = 0 \quad (2.20)$$

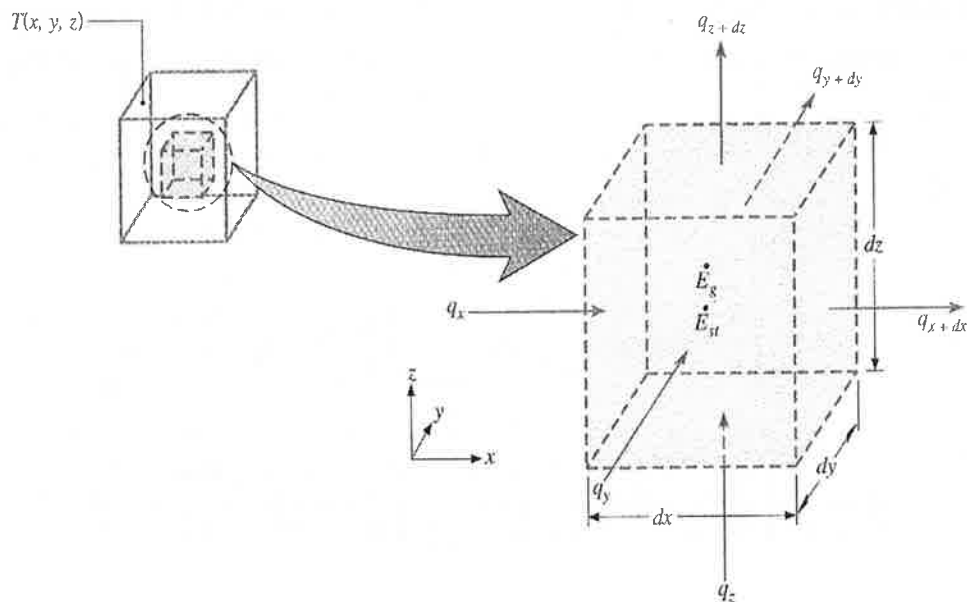


Figura 2.4 Volumen de Control Diferencial,  $dx$ ,  $dy$ , y  $dz$ , para un análisis de conducción en coordenadas Cartesianas.

La rapidez de trabajo viscoso en la superficie de control se calcula de manera formal, integrando el producto punto del esfuerzo viscoso y la velocidad en la superficie de control. Como ésta operación resulta tediosa, se expresará la rapidez de trabajo viscoso así:  $\Lambda \Delta x \Delta y \Delta z$ , donde  $\Lambda$  es la rapidez de trabajo viscoso por unidad de volumen.

Para el tercer término de la Ecuación (2.16) se escribe:

$$\frac{\delta W_\mu}{dt} = \Lambda \Delta x \Delta y \Delta z \quad (2.21)$$

La integral de superficie incluye la *transferencia total de energía a través de la superficie de control debido al flujo de un fluido*. Todos los términos asociados con la integral de superficie se han definido ya anteriormente. La integral de superficie es:

$$\begin{aligned} \iint_{c,s} \left( e + \frac{P}{\rho} \right) \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA = & \\ & \left[ \rho v_x \left( \frac{v^2}{2} + gy + u + \frac{P}{\rho} \right) \Big|_{x+\Delta x} - \rho v_x \left( \frac{v^2}{2} + gy + u + \frac{P}{\rho} \right) \Big|_x \right] \Delta y \Delta z \\ & + \left[ \rho v_y \left( \frac{v^2}{2} + gy + u + \frac{P}{\rho} \right) \Big|_{y+\Delta y} - \rho v_y \left( \frac{v^2}{2} + gy + u + \frac{P}{\rho} \right) \Big|_y \right] \Delta x \Delta z \\ & + \left[ \rho v_z \left( \frac{v^2}{2} + gy + u + \frac{P}{\rho} \right) \Big|_{z+\Delta z} - \rho v_z \left( \frac{v^2}{2} + gy + u + \frac{P}{\rho} \right) \Big|_z \right] \Delta x \Delta y \end{aligned} \quad (2.22)$$

El término de la *acumulación de la energía* describe la variación de la energía total dentro del volumen de control como una función del tiempo, por lo cual tenemos lo siguiente:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{c,v} e \rho dV = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{v^2}{2} + gy + u \right] \rho \Delta x \Delta y \Delta z \quad (2.23)$$

Las Ecuaciones (2.19) y (2.23) pueden combinarse ahora, como se indica en la expresión general de la primera ley de la termodinámica, la cual es la misma Ecuación (2.16). Haciendo esta combinación y dividiendo la ecuación entre el volumen de control del elemento, se obtendrá lo siguiente:

$$\frac{\delta Q}{dt} - \frac{\delta W_s}{dt} - \frac{\delta W_\mu}{dt} = \frac{k(\partial T/\partial x)|_{x+\Delta x} - k(\partial T/\partial x)|_x}{\Delta x} + \frac{k(\partial T/\partial y)|_{y+\Delta y} - k(\partial T/\partial y)|_y}{\Delta y} + \frac{k(\partial T/\partial z)|_{z+\Delta z} - k(\partial T/\partial z)|_z}{\Delta z} + q + \Lambda$$

$$\iint_{c.s} \left( e + \frac{P}{\rho} \right) \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA =$$

$$\frac{\left\{ \rho v_x \left[ (v^2/2) + gy + u + (P/\rho) \right] \Big|_{x+\Delta x} - \rho v_x \left[ (v^2/2) + gy + u + (P/\rho) \right] \Big|_x \right\}}{\Delta x} +$$

$$\frac{\left\{ \rho v_y \left[ (v^2/2) + gy + u + (P/\rho) \right] \Big|_{y+\Delta y} - \rho v_y \left[ (v^2/2) + gy + u + (P/\rho) \right] \Big|_y \right\}}{\Delta y} +$$

$$\frac{\left\{ \rho v_z \left[ (v^2/2) + gy + u + (P/\rho) \right] \Big|_{z+\Delta z} - \rho v_z \left[ (v^2/2) + gy + u + (P/\rho) \right] \Big|_z \right\}}{\Delta z} +$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \left( \frac{v^2}{2} + gy + u \right) \quad (2.24)$$

Al evaluar toda esta ecuación en el límite cuando  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ , tienden a cero, esta Ecuación se transforma en:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + q + \Lambda =$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \rho v_x \left( \frac{v^2}{2} + gy + u + \frac{P}{\rho} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \rho v_y \left( \frac{v^2}{2} + gy + u + \frac{P}{\rho} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \rho v_z \left( \frac{v^2}{2} + gy + u + \frac{P}{\rho} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho \left( \frac{v^2}{2} + gy + u \right) \right] \quad (2.25)$$

La Ecuación (2.25) tiene una aplicación completamente general. Si se introduce, ahora la derivada substancial, en dicha ecuación queda en la siguiente forma:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + q + \Lambda$$

$$= \nabla \cdot (P\mathbf{v}) + \left( \frac{v^2}{2} + u + gy \right) \left( \nabla \cdot \rho \mathbf{v} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) + \frac{\rho}{2} \frac{Dv^2}{Dt} + \rho \frac{Du}{Dt} + \rho \frac{D(gy)}{Dt} \quad (2.26)$$

Si se utiliza la Ecuación de continuidad, (2.17) se puede reducir la Ecuación (2.26) a la siguiente forma:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + q + \Lambda =$$

$$\nabla \cdot (P\mathbf{v}) + \frac{\rho}{2} \frac{Dv^2}{Dt} + \rho \frac{Du}{Dt} + \rho \frac{D(gy)}{Dt} \quad (2.27)$$

Con la ayuda de la Ecuación (2.18), que es válida para flujos incompresibles de un fluido cuya  $\mu$  es constante, el segundo término del lado derecho de la Ecuación (2.27), se transforma en:

$$\frac{\rho}{2} \frac{Dv^2}{Dt} = -\mathbf{v} \cdot \nabla P + \mathbf{v} \cdot \rho + \mathbf{v} \cdot \mu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (2.28)$$

y para flujos incompresibles, el primer término del lado derecho de la Ecuación (2.27) queda de la siguiente manera:

$$\nabla \cdot P \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \nabla P \quad (2.29)$$

Luego al sustituir las Ecuaciones (2.28) y (2.29) en la Ecuación (2.27) y escribiendo los términos de la conducción de calor en la forma de  $\nabla \cdot k \nabla T$  se obtiene la siguiente Ecuación:

$$\nabla \cdot k \nabla T + \dot{q} + \Lambda = \rho \frac{Du}{Dt} + \rho \frac{D(g \cdot y)}{Dt} + \mathbf{v} \cdot \rho \mathbf{g} + \mathbf{v} \cdot \mu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (2.30)$$

Después de realizar algunas manipulaciones a la Ecuación (2.30) se puede reducir a la forma siguiente:

$$\nabla \cdot k \nabla T + \dot{q} + \Lambda = \rho c_v \frac{DT}{Dt} + \mathbf{v} \cdot \mu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (2.31)$$

La función  $\Lambda$  se puede expresar en función de la porción viscosa para flujos incompresibles de la siguiente manera:

$$\Lambda = \mathbf{v} \cdot \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \Phi \quad (2.32)$$

donde la “función de disipación”,  $\Phi$  esta dada por :

$$\begin{aligned} \Phi = 2\mu & \left[ \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_y}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 \right] \\ & + \mu \left[ \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (2.33)$$

Ahora si se sustituye  $\Lambda$  en la Ecuación (2.31), se observará que la ecuación de la energía se transforma en la siguiente Ecuación:

$$\nabla \cdot k \nabla T + \dot{q} + \mathcal{G} = \rho c_v \frac{DT}{Dt} \quad (2.34)$$

Como se observa en la Ecuación (2.32) que  $\Phi$  es función de viscosidad del fluido y de la rapidez de deformación cortante y que su dominio es positivo. El efecto de la disipación viscosa tiende siempre a aumentar la energía interna a expensas, ya sea de la energía potencial o de la presión de estancamiento.

#### 2.4.2 Formas Especiales de la Ecuación Diferencial de Energía

Una ecuación Diferencial Parcial es la base de algunos modelos matemáticos de fenómenos físicos y no físicos. Cada ecuación emplea una cantidad  $\phi$  como su variable dependiente lo cual implica que deben ser balanceados varios factores que influyen a esa variable. La variable dependiente es usualmente una propiedad específica expresada en unidades de masa. En general, las leyes físicas tales como la conservación de la energía pueden comúnmente ser expresadas con una ecuación de gobierno de la forma:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho h) + \nabla \cdot (\rho h v) = -\nabla \cdot q + \rho b \quad (2.35)$$

Las formas de la ecuación de la energía, que pueden ser aplicadas a diferentes tipos de casos. Algunas de estas formas se muestran en la Figura 2.5. En todos los casos, el término de la disipación se considera tan pequeño que puede ser ignorado.

1.- Ecuación aplicable a un fluido incompresible sin “generación de energía” y con una  $k$  constante.

$$\rho c_v \frac{DT}{Dt} = k \nabla^2 T \quad (2.36)$$

2.- Ecuación de energía aplicable a un flujo isobárico sin generación de energía y con una  $k$  constante.

$$\rho c_v \frac{DT}{Dt} = k \nabla^2 T \quad (2.37)$$

Nótese que las Ecuaciones (2.36) y (2.37) son idénticas y, sin embargo, se utilizan en situaciones físicas totalmente diferentes.

3.- En una situación tal que no exista movimiento del fluido, toda la transferencia de calor se realiza por conducción. Si esta situación existe, como indudablemente ocurre en los sólidos en los que la ecuación de la energía se transforma en:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot k \nabla T \quad (2.38)$$

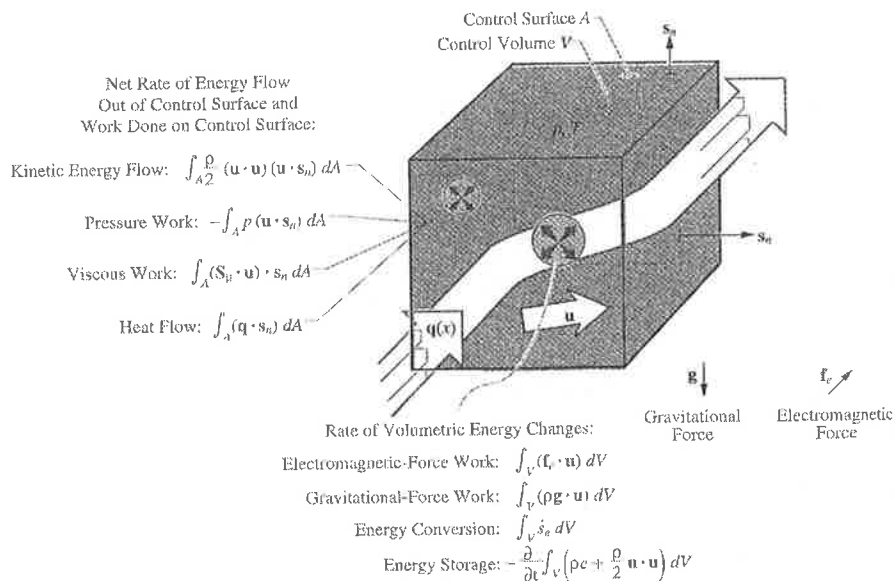


Figura 2.5 Forma Integral de la conservación de la energía, mostrando varias formas de energía, calor y trabajo fluyendo a través de la superficie de control y ocurriendo dentro del volumen de control.



La Ecuación (2.38) se aplica en general a la conducción de calor. No se ha hecho ninguna suposición respecto a la constante  $k$ . Si la conductividad térmica es constante, la ecuación de la energía se transforma en la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \nabla^2 T + \frac{q}{\rho c_p} \quad (2.39)$$

donde la razón  $k/\rho c_p$  se ha sustituido por el término  $\alpha$ , el cual se le llama *Difusividad Térmica*. Puede verse que las unidades de  $\alpha$  son  $L^2/t$ ; en el sistema SI, si se expresa en  $m^2/seg$ , y en el sistema inglés en  $ft^2/h$ . Si el medio conductor no contiene fuentes de generación de calor, la Ecuación (2.39) se reduce a la *ecuación de Fourier de campo*, la cual es la siguiente:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \nabla^2 T \quad (2.40)$$

a la cual ocasionalmente se le hace referencia como la segunda “ley” de Fourier de la conducción de calor. En un sistema en el que las fuentes de generación de calor se encuentran presentes pero en el que no haya variación de tiempo, la Ecuación (2.39) se reduce a la bien *conocida ecuación de Poisson*, que es la siguiente:

$$\nabla^2 T + \frac{q}{k} = 0 \quad (2.41)$$

La última forma que la ecuación de conducción de calor que se presenta aquí, se utiliza en el estado constante sin fuentes de generación de calor. En éste caso, la distribución de la temperatura debe satisfacer la *ecuación de Laplace*, por lo que tenemos:

$$\nabla^2 T = 0 \quad (2.42)$$

Cada una de las Ecuaciones, desde la (2.39) hasta la (2.42) se ha escrito en su forma general, por lo que todas ellas son aplicables a cualquier sistema ortogonal de coordenadas. Si el operador Laplaciano,  $\nabla^2$  se escribe en la forma apropiada, se logrará hacer la transformación al sistema de coordenadas deseado.

En este trabajo solo se hace referencia al sistema de coordenadas rectangulares, por lo que la Ecuación de campo de Fourier queda de la siguiente manera:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] \quad (2.43)$$

### 2.4.3 Ecuación General de Transporte

Ya se había visto que los problemas continuos que nosotros deseamos resolver son usualmente formulados en términos de las ecuaciones diferenciales parciales de gobierno. Para problemas de transferencia de calor y flujo de fluidos, los cuales surgen de un análisis en los procesos de conducción y convección, la ecuación diferencial representativa es la Ecuación general de transporte, escrita en la forma de la conservación de la energía como:

$$\gamma \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \beta \nabla \cdot (\mathbf{v} \varphi) - \nabla \cdot (\Gamma \nabla \varphi) - s = 0 \quad (2.44)$$

Donde  $\varphi$  es la función desconocida, asumiendo ser un valor único dentro del dominio,  $t$ , es el tiempo,  $\mathbf{v}$  es el vector de la velocidad,  $\gamma$ ,  $\beta$  y  $\Gamma$  son conocidas como las propiedades específicas y  $s$  es la razón volumétrica de la fuente. Si la divergencia  $\nabla \cdot \mathbf{v}$  del campo de la velocidad puede ser considerada idénticamente igual a cero, el término  $\beta \nabla \cdot (\mathbf{v} \varphi)$  el cual contiene la velocidad, dentro de la Ecuación (2.44) puede ser escrito en forma no conservadora como  $\beta (\nabla \cdot \mathbf{v} \varphi)$ , y la Ecuación (2.44) es agrupada en forma no conservadora como:

$$\gamma \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \beta (\mathbf{v} \cdot \nabla \varphi) - \nabla \cdot (\Gamma \nabla \varphi) - s = 0 \quad (2.45)$$

Varias técnicas de interés en problemas de transferencia de calor son descritas por la Ecuación (2.45), simplemente especificando los coeficientes apropiados.

Unos pocos ejemplos de ecuaciones de dos dimensiones, escritos en coordenadas Cartesianas de dos dimensiones, proveerán una idea general de esos problemas. La distribución de temperatura  $T$  en un medio de quien la conductividad térmica es  $k$  satisface la ecuación de Laplace para conducción de calor estacionario,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) = 0 \quad (2.46)$$

Si no hay presencia de una fuente térmica, se describe la Ecuación de Poisson como:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + q = 0 \quad (2.47)$$

además si la razón de generación interna de calor por unidad de volumen  $q$  es diferente de cero. La variación de temperatura  $T$  con el tiempo  $t$ , en un medio en el cual la capacitancia por unidad de volumen es  $\rho c$ , satisface a la Ecuación de Fourier:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} - \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) \right] - q = 0 \quad (2.48)$$

En la presencia de un campo de flujo, con componentes de velocidad  $u$  y  $v$  en la dirección de  $x$  y  $y$  respectivamente, los términos convectivos no pueden ser omitidos y

la ecuación de la energía de transporte en estado estable puede ser escrita en una forma no conservativa como:

$$\rho c \left( u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) - \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) \right] = 0 \quad (2.49)$$

si los efectos de generación de calor volumétrico y de la disipación viscosa son omitidos. La ecuación transitoria de la energía considera los efectos del almacenaje de la energía por unidad de volumen del fluido  $\rho c \partial T / \partial t$ .

Por lo tanto, si la razón de generación interna de calor por unidad de volumen  $q$  es también diferente de cero, la ecuación de la energía transitoria puede ser escrita en forma no conservativa como:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \rho c \left( u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) - \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) \right] - q = 0 \quad (2.50)$$

Como puede ser visto de las Ecuaciones (2.49) y (2.50), el transporte de energía en los fluidos depende de la distribución de la velocidad, siempre que los fluidos estén en movimiento. También son importantes los efectos principales que surgen dentro del análisis de flujo por convección que dificultan la solución de problemas.

En problemas de flujo la ecuación de movimiento, o “ecuación de transferencia de momento”, tienen la misma forma general como las expresiones (2.44) y (2.45), si  $\phi$  es denotado como la velocidad de los componentes,  $\gamma$  la densidad,  $\Gamma$  viscosidad efectiva y  $s$  el termino fuerza / fuente. Las mismas Ecuaciones generales de transporte (2.44) y (2.45) son también apropiadas para la transferencia de momento en fluidos tridimensionales, el flujo laminar con una dirección axial predominante, para la conservación de energía cinética turbulenta y para la razón de la transferencia de disipación de energía cinética turbulenta.

En los siguientes puntos discutiremos varias formas de estas ecuaciones diferenciales las cuales tienen una relación sobre aplicaciones prácticas. Sin embargo las ecuaciones aquí presentadas tienen un punto de ventaja lo suficientemente bueno para la ilustración de las principales formas del análisis del elemento finito de transferencia de calor por conducción y convección.

#### 2.4.4 Ecuaciones de Gobierno

Las ecuaciones diferenciales parciales son la base de algunos modelos matemáticos de los fenómenos físicos y los no físicos. Las ecuaciones diferenciales individuales que encontraremos expresan un cierto principio de conservación. Este principio está basado en el empleo de una cantidad como la variable dependiente e implica que debe haber un equilibrio entre los varios factores que influyen a la variable.

##### 2.4.4.1 Ecuación de Energía.

La ecuación de la energía en su forma más general puede ser escrita como sigue:

$$\left. \frac{\partial(\rho h)}{\partial t} \right|_x + \rho h \operatorname{div} \underline{v}^* + \operatorname{div}(\rho h (\underline{v} - \underline{v}^*)) = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} T) + b \quad (2.51)$$

donde  $h$  es la entalpía específica,  $\underline{v}$  es la velocidad del material,  $\underline{v}^*$  es la velocidad del volumen de control,  $\rho$  es la densidad del material y  $b$  es el término de fuerza del cuerpo, usualmente conocido como la eficiencia volumétrica de la generación del calor. El término  $\operatorname{div}(k \operatorname{grad} T)$ , representa la influencia de transmisión de calor por conducción dentro del material, según la ley de Fourier de conducción de calor,  $k$  es la conductividad térmica del material. Por lo tanto la Ecuación (2.51) se puede reducir a una forma estándar [43] si  $\underline{v}^* = 0$ , por ejemplo:

$$\frac{\partial(\rho h)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho h \underline{v}) = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} T) + b \quad (2.52)$$

Es importante apreciar que aunque las Ecuaciones (2.51) y (2.52) parecen diferentes, ellas son esencialmente idénticas. La identidad de la derivada temporal definida en la sección 4.5.4, puede ser usada para transformar la Ecuación (2.51) directamente en la Ecuación (2.52). Evidentemente, el movimiento de un volumen de control con velocidad  $\underline{v}^*$  puede no alterar la física gobernante.

#### 2.4.4.2 Ecuación de Transferencia de Calor.

La ley de conservación del principio fundamental de energía para transferencia de calor da una ecuación de calor difusiva inestable, por lo que para ésta ecuación se hace la siguiente transformación:

$$c = \frac{\Delta H}{\Delta T} \quad (2.53)$$

a lo que si despejamos  $\Delta H$  tenemos lo siguiente:

$$\Delta H = c \Delta T \quad (2.54)$$

o lo que es lo mismo  $h = c T$

Además si la velocidad del material es  $\underline{v} = 0$ , entonces la Ecuación (2.51) se transforma en:

$$\left. \frac{\partial(\rho c T)}{\partial t} \right|_x + \rho c T \operatorname{div} \underline{v}^* - \operatorname{div}(\rho c T \underline{v}^*) = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} T) + b \quad (2.55)$$

dicha ecuación se reduce aún mas [43] si hacemos que  $\underline{v}^* = 0$ , por lo que obtenemos la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho c T) = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} T) + b \quad (2.56)$$

donde  $c$  es la presión constante del calor específico o es el termino Capacitancia en los tratamientos de solidificación. Para éste documento, el término  $c$  es simplemente llamado el termino de capacitancia y es calculado por vía de las relaciones de la entalpía lineal, incluso si no hay una relación o absorción del calor latente. La condición inicial y condición de frontera de Cauchy para la Ecuación (2.51) están dadas por:

$$T(x,0) = f(x) \quad \text{donde } x \in \Omega \quad (2.57)$$

$$h_{\infty} (T - T_w) = -k \nabla T \cdot n \quad \text{sobre la superficie de } \Gamma \quad (2.58)$$

Donde  $h_{\infty}$  es el coeficiente de transferencia de calor y  $T_w$  es la temperatura de bulbo del fluido, como se muestran en la Figura 2.6.

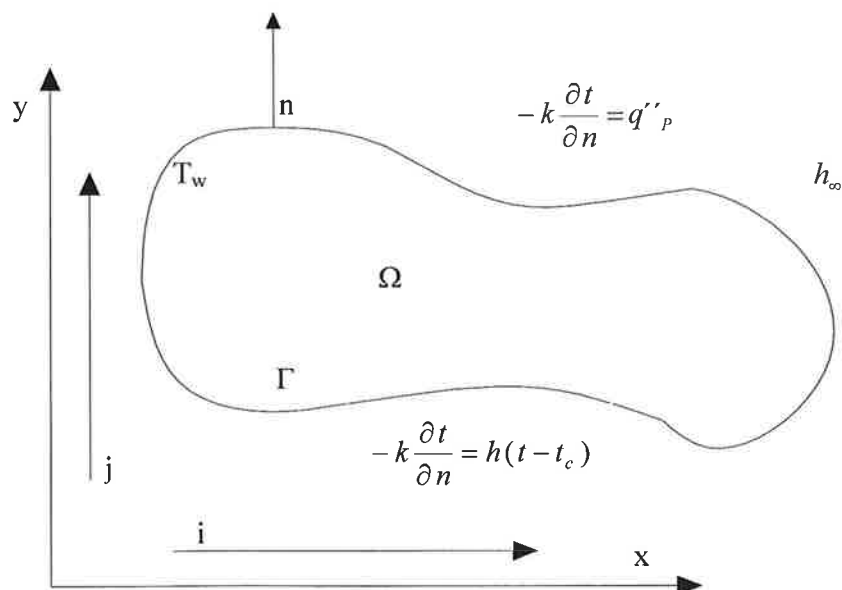


Figura 2.6 Condiciones de frontera típicas para problemas de conducción de calor.

# *Capítulo Tres*

## **METODO DE LA CAPACITANCIA DE VOLUMEN DE CONTROL**

---

### **3.1 Introducción a la Modelación de la Solidificación**

La modelación de la solidificación es una área de investigación que está creciendo y es de particular interés para la comunidad científica de las diferentes áreas de la transferencia de calor. La habilidad para predecir la variación de la temperatura en un proceso térmico, como la solidificación, es un punto de comienzo esencial para otras formas de análisis. En particular la predicción exacta de defectos, como la distorsión, el diseño de moldes, etc., depende en gran medida sobre un buen modelo de la solidificación.

Técnicas numéricas para la modelación de la solidificación pueden ser enumeradas en dos grupos; frentes móviles y de dominio fijo [1]. Los métodos de frentes móviles están a menudo restringidos a problemas de una dimensión o donde la solidificación frontal es de una forma relativamente simple. Los métodos de dominio fijo tienden a ser más versátiles y más fáciles de implementar, y por lo tanto encontraron un uso más amplio en la modelación de la solidificación.



En la siguiente figura se muestra a un cuerpo que se encuentra solidificando.

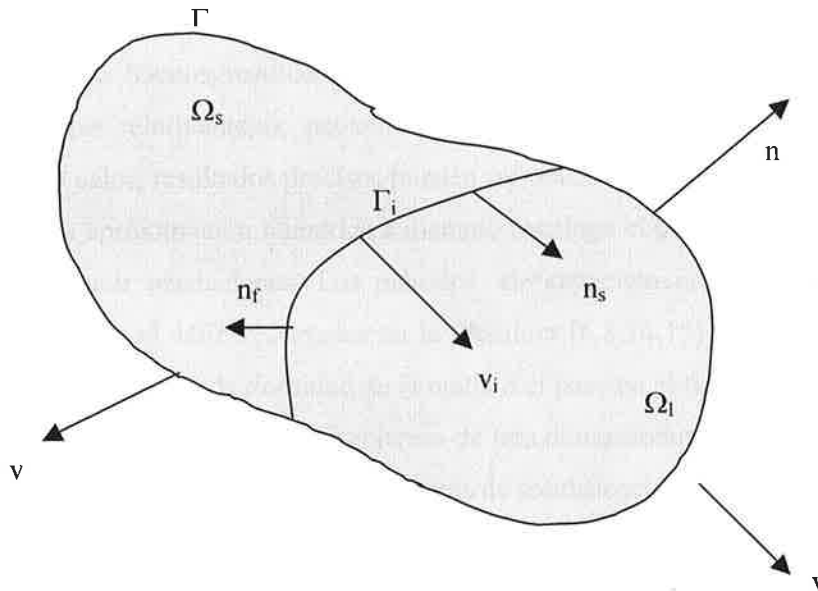


Figura 3.1 Dominio del Sólido y el Líquido en un cuerpo solidificando.

Cuatro métodos de dominio fijo son comúnmente empleados para resolver problemas de la solidificación; estos son llamados; método de entalpía [2-5,110], método de capacitancia [6-10], flujo de calor ficticio [11,12] y el método de recuperación de la temperatura [13]. Un buen repaso de estas técnicas están dadas por Voller [14] y por Dualhuijsen [15]. En este capítulo nuestra atención se centra sobre los métodos de capacitancia usando el Método de Elementos Finitos. El Método de Capacitancia de calor aparente ha sido ampliamente usado en recientes investigaciones. Una mayor ventaja de este método es que es fácil de incorporar dentro de algunos códigos ya existentes desde que la ecuación gobernante es idéntica a la ecuación de calor parabólica. La principal desventaja es que si la capacitancia de calor aparente es calculada directamente de las relaciones de entalpía, entonces el método tiende a producir resultados con errores. Es particularmente problemático donde la solidificación ocurre a una temperatura diferente o sobre un pequeño rango de temperatura, por ejemplo el caso para materiales puros o aceros de una composición muy cercana a la

eutéctica. Este problema puede ser direccionado, imponiendo un gran rango de temperatura de solidificación artificialmente, el cual no puede reflejar adecuadamente la física del problema, o aplicando una aproximación numérica. El método de la aproximación numérica es generalmente preferido. Lewis y Roberts [6] encontraron que el método de diferencias finitas hacia atrás promediando la capacitancia de calor aparentemente dio buenos resultados. Sin embargo, Voller [14] demostró que para pasos de tiempo relativamente pequeños y una aproximación numérica para la capacitancia de calor, resultados precisos pueden ser obtenidos. Dalhuijsen y Segal [15] notaron que una aproximación numérica a menudo restringe el paso en el tiempo y está propensa a producir oscilaciones. Los métodos de capacitancia de calor efectiva o aparente basados en el *MEF* reportados en la literatura [6,8,14,15] a menudo imponen algunas restricciones sobre la densidad de la malla o el paso en el tiempo, por lo cual no pueden fácilmente ser extendidos a problemas de tres dimensiones, o resultan difícil de aplicar a materiales con diferentes características de solidificación. A diferencia de otras formulaciones ambas la temporal y la espacial son justificadas para la predicción de una capacitancia de calor efectiva [11], la cual es calculada resolviendo la ecuación no lineal que describe la pérdida de la energía exacta para cada Elemento Finito. En este sentido los campos de temperatura y pérdida de energía están acoplados produciendo una solución extremadamente estable. La aproximación se aplica específicamente a Elementos Finitos Tetraédricos Lineales, aunque en un principio pueden ser extendidos a otro tipo de elementos. Los cuatro nodos de elementos tetraédricos describen un campo de temperatura lineal que permite integrar analíticamente en el procedimientos de solución.

### **3.2 Repaso de Teoría**

La solidificación de metales y aleaciones puras de composición eutéctica ocurren en una temperatura distinta y para una solidificación rápida se establece un frente liso distinto del cambio de fase sólido-líquido establecido. Todo el calor latente es liberado o adsorbido de una interfase distinta entre el sólido y el líquido. Sin embargo, para la mayoría de los metales la interfase sólido-líquido no es lisa, pero si es de naturaleza dendrítica. Más aun, los cristales se pueden formar antes de la solidificación. La región donde las fases sólidas y líquidas coexisten es denominada como zona blanda. En este

caso el relacionado calor latente depende de la fracción líquida local. Varias relaciones entre la fracción líquida y la temperatura se han desarrollado para explicar los varios mecanismos de redistribución absoluta en las fases sólidas o líquidas [112].

### 3.3 Capacitancia

En este punto es de suprema importancia la selección de una razonable aproximación para el término de capacitancia. Esta puede ser hecha después de comparar las Ecuaciones (2.51) y (2.55), por ejemplo,

$$\left. \frac{\partial(\rho c T)}{\partial t} \right|_x + \rho c T \operatorname{div} \underline{v}^* - \operatorname{div}(\rho c T \underline{v}^*) = \left. \frac{\partial(\rho h)}{\partial t} \right|_x + \rho h \operatorname{div} \underline{v}^* + (\rho h (\underline{v} - \underline{v}^*)) \quad (3.1)$$

Si la capacitancia es asumida espacial y temporalmente invariante sobre una pequeña región de un intervalo del volumen de control y del tiempo respectivamente, entonces la Ecuación (3.1) puede ser reorganizada de la siguiente manera:

$$c = \frac{\left. \frac{\partial(\rho h)}{\partial t} \right|_x + \rho h \operatorname{div} \underline{v}^* + \operatorname{div}(\rho h (\underline{v} - \underline{v}^*))}{\left. \frac{\partial(\rho T)}{\partial t} \right|_x + \rho T \operatorname{div} \underline{v}^* - \operatorname{div}(\rho T \underline{v}^*)} \quad (3.2)$$

La cual se reduce a la ecuación siguiente:

$$c = \frac{\left. \frac{\partial(\rho h)}{\partial t} \right|_x + \operatorname{div}(\rho h \underline{v})}{\left. \frac{\partial(\rho T)}{\partial t} \right|_x} \quad (3.3)$$

con  $\underline{v}^* = 0$ , la cual está bien definida para  $\partial(\rho T)/\partial t \neq 0$

Similarmente, al comentario anterior para la Ecuación (2.52), el valor de la capacitancia definida en un punto por las Ecuaciones (3.2) y (3.3) son idénticas. La ventaja de la Ecuación (3.2) es que ésta es una forma conveniente que facilita la determinación de la capacitancia sobre un volumen de control. Para ver esto, considerar la integración del numerador y del denominador sobre un elemento del dominio  $\Omega_e$ , lo que nos resulta la siguiente ecuación:

$$c = \frac{\int_{\Omega_e} \left( \frac{\partial(\rho h)}{\partial t} \Big|_x + \rho h \operatorname{div} \underline{v}^* \right) dV + \int_{\Omega_e} \operatorname{div}(\rho h (\underline{v} - \underline{v}^*)) dV}{\int_{\Omega_e} \left( \frac{\partial(\rho T)}{\partial t} \Big|_x + \rho T \operatorname{div} \underline{v}^* \right) dV - \int_{\Omega_e} \operatorname{div}(\rho T \underline{v}^*) dV} \quad (3.4)$$

aplicando a la Ecuación (3.4) el Teorema de Transporte de Reynolds y el Teorema de Divergencia, obtenemos que:

$$c = \frac{\frac{d}{dt} \int_{\Omega_e} \rho h dV + \int_{\Gamma_e} \rho h (\underline{v} - \underline{v}^*) \cdot \underline{n} dA}{\frac{d}{dt} \int_{\Omega_e} \rho T dV - \int_{\Gamma_e} \rho T \underline{v}^* \cdot \underline{n} dA}$$

Ahora si ajustamos  $\underline{v}^* = 0$ , entonces la Ecuación (3.4) se reduce aún mas a la ecuación siguiente:

$$c = \frac{\frac{d}{dt} \int_{\Omega_e} \rho h dV + \int_{\Gamma_e} \rho h \underline{v} \cdot \underline{n} dA}{\frac{d}{dt} \int_{\Omega_e} \rho T dV} \quad (3.5)$$

### 3.3.1 Capacitancia del Calor Aparente

La capacitancia de calor aparente puede ser descrita en términos de la fracción del líquido local,  $g_l$  [14], la cual es representada por la siguiente Ecuación:

$$c^* = (1 - g_l) \rho_s c_s + g_l \rho_l c_l + \delta h dg_l / dT \quad (3.6)$$

donde

$$\delta h = \int_{T_{ref}}^T (\rho_l c_l - \rho_s c_s) dT + \rho_l L \quad (3.7)$$

Las Ecuaciones de (3.6) y (3.7) se aplican a la solidificación a distintas temperaturas (solidificación isotérmica) y sobre un rango de temperatura (solidificación suave). Sin embargo, se debe tener cuidado en la implementación numérica de estas ecuaciones. Cuando se emplea el Método del Elemento Finito (FEM), la capacitancia de calor aparente necesita ser calculada en los nodos que experimenta la solidificación. En el caso de la solidificación isotérmica la capacitancia de calor aparente exhibe una singularidad en la temperatura del sólido, ver la Figura (3.2a), y la evaluación directa en los nodos de las Ecuaciones (3.6) y (3.7) pueden dar algunos errores. Esto es porque la contribución para la capacitancia del calor aparente del calor latente realizado es cero o infinito, dependiendo de la temperatura nodal. Claramente, la evaluación directa de la capacitancia del calor aparente también dará inexactitudes para materiales con zonas blandas relativamente pequeñas. Este problema puede ser superado introduciendo una zona blanda artificialmente, aunque se debe tener mucho cuidado de no desviar demasiado el problema original. Alternativamente una aproximación numérica puede ser adoptada; entonces una posible aproximación espacial [15] puede ser de la siguiente manera:

$$c^* = \frac{dh}{dT} \approx \left[ \frac{(\partial h / \partial x)^2 + (\partial h / \partial y)^2 + (\partial h / \partial z)^2}{(\partial T / \partial x)^2 + (\partial T / \partial y)^2 + (\partial T / \partial z)^2} \right]^{1/2} \quad (3.8)$$

y una aproximación temporal [6] la cual puede ser escrita de la manera siguiente:

$$c^* = \frac{dh}{dT} \approx \frac{h^n - h^{n+1}}{T^n - T^{n+1}} = \frac{\Delta h}{\Delta T} \quad (3.9)$$

La capacitancia de calor aparente puede ser directamente evaluada de las Ecuaciones (3.8) y (3.9) en el caso de materiales con una zona blanda relativamente amplia la cual se extiende sobre varios elementos, ver la Figura (3.2b).

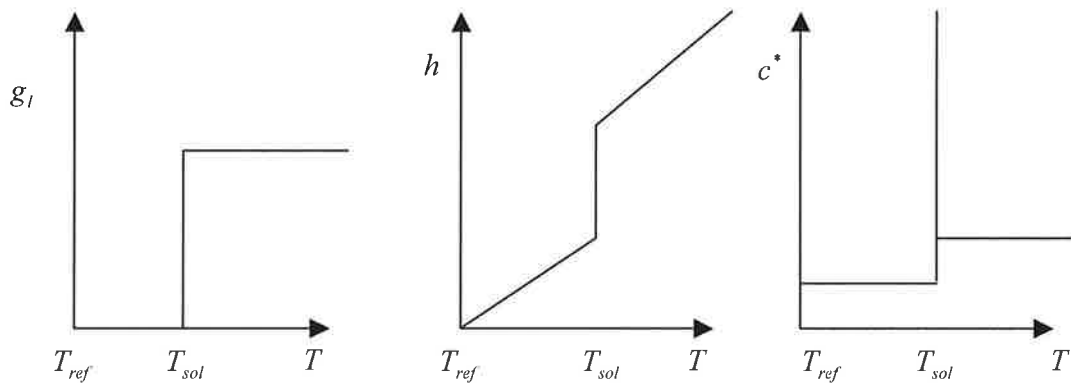


Figura 3.2a. Fracción líquida ( $g_l$ ), Entalpía ( $h$ ) y Capacitancia de Calor Aparente ( $c^*$ ) para Solidificación de Metales Isotermicamente.

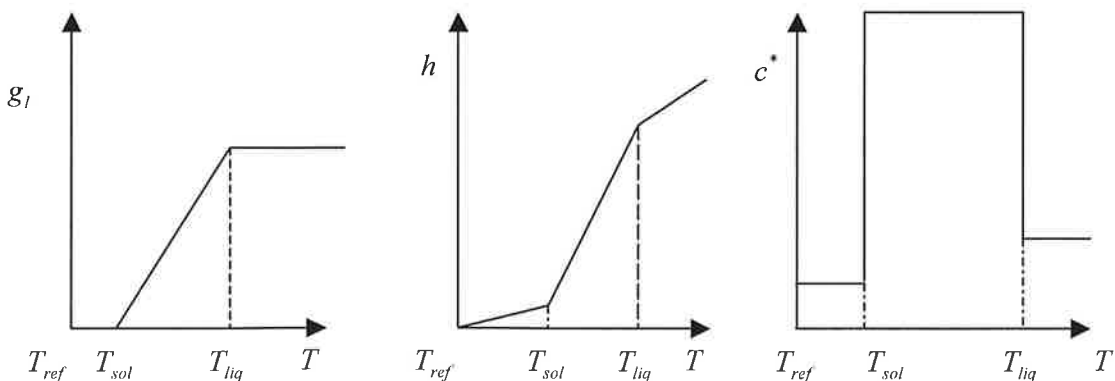


Figura 3.2b. Fracción líquida ( $g_l$ ), Entalpía ( $h$ ) y Capacitancia de Calor Aparente ( $c^*$ ) para Metales de Acero.

### 3.3.2 Capacitancia de Calor Efectiva

Una mejora sobre el método de la capacitancia de calor aparente involucra la integración numérica de la capacitancia de calor aparente sobre un elemento, como se observa en la siguiente Ecuación:

$$c_e^* = \frac{1}{V_e} \int_{\Omega_e} c^* d\Omega \quad (3.10)$$

donde  $c_e^*$  es una capacitancia de calor efectiva y  $V_e$  es el volumen del elemento. En general, este método produce resultados mas precisos que el método de capacitancia de calor aparente. Sin embargo, la integración numérica puede ser demasiado excesiva computacionalmente en particular para pequeñas zonas blandas y gradientes de temperatura pequeños donde una alta simplificación con frecuencia es requerida [111].

### 3.3.3 Método Basado en una Fuente

Un método alternativo que a menudo es usado está basado en una fuente o en un método de flujo de calor ficticio. En este caso el calor latente es representado por un término de calor llamado fuente,  $Q_s$ , y la ecuación de gobierno es la siguiente:

$$\nabla \cdot (k \nabla T) = \bar{c} \partial T / \partial t + Q_s \quad (3.11)$$

donde  $\bar{c} = (1 - g_l) \rho_s c_s + g_l \rho_l c_l$  y  $Q_s = \delta h dg_l / dt$ . Este método ha sido utilizado por Voller [14] con el cual obtiene resultados razonables.



# *Capítulo Cuatro*

## **METODOS DE DISCRETIZACIÓN**

---

### **4.1 Método de Elemento Finito**

La idea básica de utilizar procedimientos de elemento finito data de a principios de los años 40's, por ejemplo, el análisis de sistemas discretos, tales como la armadura de estructuras, por métodos matriciales a través de los pasos más esenciales del método de elemento finito general. Sin embargo, se está generalmente de acuerdo que la etiqueta de "Método de Elemento Finito" apareció por vez primera en 1960 en un documento de elasticidad, el cual empleaba el uso de una metodología estándar aplicable a la discretización de un sistema continuo. Cerca de los años 60's el desarrollo de calculadoras numéricas electrónicas permitió el progreso rápido de los "métodos matriciales" para el análisis de estructuras enmarcadas a los "métodos de elemento finito" para la investigación de los problemas de la elasticidad en mecánica de sólidos de serie continua. No obstante los métodos de elemento finito tienen una amplia gama en uso no estructural de ingeniería y, en 1965, los elementos finitos fueron usados por primera vez en la solución de un problema del campo térmico.

Problemas en estado estable fueron resueltos dentro del contexto de transferencia de calor y campos eléctricos, mientras que la solución de varios problemas de conducción transitoria de calor y en general procesos de integración siguieron pronto. Por otro lado, fue ya en los años 70's cuando los matemáticos empezaron a contribuir significativamente en el entendimiento de la metodología teórica, investigando varias aproximaciones para derivar la ecuación en diferencias finitas de los principios: variacional, balance de energía y residuos ponderados. En 1974, el primer simposio sobre métodos de elemento finito en problemas de flujo abrió enteramente la manera a una nueva gama de aplicaciones en la mecánica de fluidos y en la transferencia convectiva de calor. Desde 1974, varias conferencias internacionales, varios libros y un gran número de artículos de revista han sido hechos en aplicaciones del elemento finito para flujo de calor y fluidos, una de las áreas activas de mayor interés en la solución numérica de problemas continuos. El primer paso en la solución numérica de problemas de ingeniería es la elección de un modelo computacional adecuado, el cual proporcionará alguna idea del comportamiento físico del sistema investigado.

Se ha notado que algunos problemas de ingeniería pueden ser adecuadamente modelados usando un número finito de componentes individuales. Ejemplos familiares de sistemas discretos son las armaduras estructurales, armazones, puentes, circuitos eléctricos y redes de tuberías. En el análisis de sistemas discretos, los componentes individuales como las barras, el resistor eléctrico y los tubos son identificados como "elementos". Estos elementos pueden ser considerados interconectados a un punto específico, los cuales son llamados puntos nodales o simplemente "nodos". Un sistema típico discreto donde los nodos están en el punto final de cada elemento, se muestra en la Figura (4.1a).

Tal sistema puede representar, por ejemplo, un armazón articulado en el plano como se muestra en la Figura (4.1b), un circuito eléctrico, como lo muestra la Figura (4.1c), o una red de tuberías conduciendo fluido, como se muestra en la Figura (4.1d). Para encontrar, en el sistema entero, el comportamiento de las variables desconocidas (las dislocaciones, potenciales eléctricos, presiones) es a menudo conveniente empezar de unas relaciones simples, válidas en el nivel del elemento.

Por ejemplo, en el análisis de los sistemas discretos mostrados en la Figura 4.1, podemos expresar el comportamiento de un elemento único para cada ley como:

- Ley de Hooke para una barra estructural de un dimensión.

$$F = \frac{\Delta L}{R} = E A \frac{\Delta L}{L} \quad (4.1)$$

- Ley de Ohm para resistores eléctricos

$$i = \frac{\Delta V}{R} = \frac{A \Delta V}{\rho L} \quad (4.2)$$

- Ley de Poiseuille's para flujo laminar en una dimensión dentro de tubos.

$$m = \frac{\Delta p}{R} = \frac{\rho \pi D^4}{128 \mu} \frac{\Delta p}{L} \quad (4.3)$$

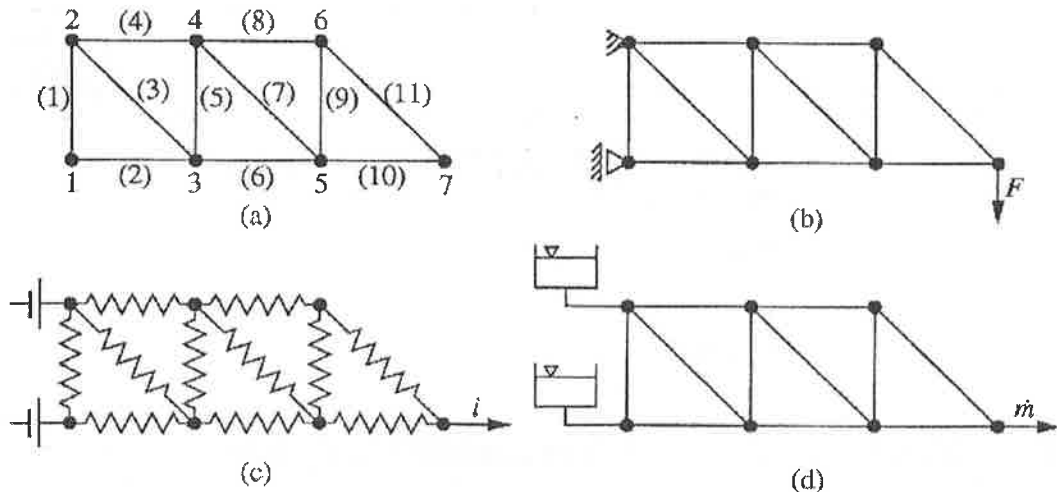


Figura 4.1 Sistemas discretos típicos y su interpretación física: (a) nodos ● y los elementos de interconexión \_\_\_\_\_; (b) Estructura; (c) Circuito de resistencias eléctricas; (d) Redes de tuberías

Además, en la investigación del comportamiento del elemento, debemos tomar en cuenta los efectos, sin ninguna acción física adicional como pudieran ser la distribución de las cargas en la estructura. Los efectos resultantes de esas acciones deben ser divididos entre las cantidades nodales equivalentes, de tal modo que una representación consistente física se pueda obtener. Esto indica que el conocimiento del comportamiento del elemento es de poco uso a menos que todos los valores de las variables nodales hayan sido determinadas. Por lo tanto, para resolver éste problema global, algunos principios han sido aplicados a cada nodo, para ensamblar los arreglos de las ecuaciones algebraicas, las cuales permiten el cálculo de la solución completa. Para los sistemas de la Figura 4.1 las ecuaciones nodales pueden ser obtenidas de tales principios como:

- Equilibrio estático en armaduras estructurales
- Leyes de Kirchhoff's para circuitos eléctricos
- Conservación de la masa para fluidos en redes

Una vez que los resultados de los arreglos han sido ensamblados, nodo por nodo sobre la base, las condiciones de frontera deben ser introducidas para obtener una solución única. Esta solución permitirá la evaluación de las variables nodales y el cálculo de las cantidades desconocidas de la frontera donde las variables nodales han sido especificadas como condiciones de frontera. Por ejemplo, con referencia a la Figura 4.1, podemos resolver primero para los valores de desplazamientos nodales desconocidos, potenciales eléctricos y presiones, además se pueden encontrar los valores de las reacciones de soporte desconocidas, razones de flujo y las corrientes en los nodos. Si el comportamiento lineal de los elementos es asumido como en las Ecuaciones (4.1) y (4.3), también las ecuaciones gobernantes para el sistema entero tendrán un arreglo lineal, el cual usualmente puede ser escrito como:



En el análisis de esfuerzos, el método de elemento finito es mucho más utilizado que el método de diferencias finitas; incluso en transferencia de calor y flujo de fluidos las aplicaciones del método de elemento finito comenzaron a aumentar en su número de aplicaciones. El método del elemento finito subdivide el cálculo del dominio en elementos, tales como elementos triangulares como se muestran en la Figura 4.2. La discretización de las ecuaciones son usualmente derivadas por el uso del principio variacional cuando éste existe, o por el método Galerkin, el cual es un caso especial del método de residuos ponderados. En la derivación de una “función de forma” o en la derivación de un perfil, éste método se usa para describir como la variable dependiente  $\phi$  varía sobre un elemento. En la sección 4.1.3, la formulación del volumen de control es otro caso especial del método de residuos ponderados. También usamos funciones de forma para describir la variación de  $\phi$  entre dos puntos de la malla. Además ocurre que estas funciones de forma tienen una dimensión local; esto es porque de la característica de esas líneas de la malla se forma una línea ortogonal final. El desarrollo de un método de elemento finito satisfactorio para la transferencia del calor y del flujo de los fluidos parece altamente conveniente.

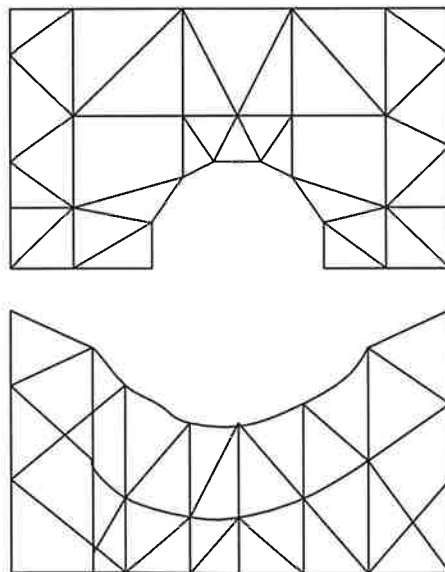


Figura 4.2 Ejemplos de la discretización del dominio por elementos triangulares.

### 4.1.1 Aproximación Galerkin de Residuos Ponderados

El método de aproximación Galerkin está clasificado como un *método de residuos ponderados*. Su análisis está basado asumiendo una solución de aproximación para la ecuación diferencial. Desde que la suposición es una aproximación, la ecuación diferencial no será satisfecha y por lo tanto habrá un error en la solución. El error (residual) es entonces optimizado con respecto a algún parámetro, y el procedimiento de optimización es llamado el método de residuos ponderados. Dada una ecuación diferencial tal como la ecuación por conducción de calor es posible asumir la solución  $T_R$  la cual es:

$$T_R = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots \quad (4.10)$$

Donde  $a_i$  son las constantes conocidas. La solución que se asuma debe satisfacer las condiciones de frontera, y se deduce que la Ecuación (4.10) debe tener al menos una o mas constantes conocidas que hay en las condiciones de frontera. Este requerimiento es fácil de satisfacer con el análisis del elemento finito. La solución exacta de la ecuación de conducción de calor esta definida como  $T$ , y la solución aproximada es  $T_R$ . El error o residuo  $R$  es la diferencia entre las dos,

$$R = T - T_R \quad (4.11)$$

El método de residuos ponderados requiere que las incógnitas de la Ecuación (4.10) sean calculadas usando el criterio siguiente:

$$\int_{\Omega} w_i(x) R(x; a_i) dV = 0 \quad (4.12)$$

Donde hay una correspondencia uno a uno entre cada  $w_i(x)$  y  $R(x; a_i)$  y donde  $\Omega$  representa el dominio del problema. El método Galerkin requiere que cada  $w_i$  de la función sea multiplicado por el correspondiente  $a_i$  de la ecuación (4.10).

Cuando es usado el método Galerkin en el análisis del elemento finito, las funciones asumidas en la Ecuación (4.10) son las funciones de forma. Esto ilustrará que el método Galerkin y la formulación variacional llevan a una formulación de elemento finito idéntica. Obviamente, el método Galerkin es una poderosa herramienta para el análisis del elemento finito que el método variacional por que casi ningún problema físico descrito por una o mas ecuaciones diferenciales pueden ser modeladas usando ésta técnica. Una vez que se tenga dominio de la técnica Galerkin derivando modelos de ecuaciones diferenciales, esto parecerá que el método Galerkin es superior al método variacional. El desarrollo del método variacional es omitido en este documento, por lo que solo se dan algunas referencias del mismo [113]. Por otro lado, problemas con dos o mas grados de libertad por nodo deben ser modelados usando una función de forma diferente para cada grado de libertad, y su derivación es mas efectiva cuando el método Galerkin es usado.

En el contexto de las diferencias finitas y de los métodos de volumen de control, los conteos son suprimidos usando aproximaciones Upwind en lugar de diferencias centrales los cuales se derivan del procedimiento de residuos ponderados Galerkin. El procedimiento parcial del correspondiente ponderado es llamado el método Petrov-Galerkin, mientras que el procedimiento estándar ponderado con las funciones de forma a menudo es llamado método Buvnov-Galerkin. Los métodos Petrov-Galerkin no siempre dan aproximaciones precisas y, además, ellos no pueden ser fácilmente extendidos a problemas transitorios.

En el análisis de elemento finito no conocemos la función  $\phi$ , incluso si tenemos alguna información de esta. La información usual es que  $\phi$  satisface a la ecuación diferencial parcial gobernante y a las condiciones de frontera preestablecidas. Consecuentemente, las técnicas de aproximación discutidas en las secciones previas deben ser consideradas como procedimientos de discretización que nos permiten expresar la aproximación  $\hat{\phi}$  por una combinación lineal de funciones de forma  $N_i$  conocidas y los valores nodales  $\phi_i$  desconocidos.



En efecto, los valores nodales de  $\phi_i$  deben ser determinados después del proceso de la discretización, suponiendo que la aproximación  $\phi$  satisface, en un sentido promedio, a la ecuación diferencial gobernante. Una ecuación diferencial parcial, gobernando un fenómeno físico en el dominio  $\Omega$ , siempre puede ser proyectada en la forma general:

$$A(\phi) = L(\phi) + g = 0 \quad (4.13)$$

donde  $\phi$  es la solución,  $L$  es un operador diferencial y  $g$  es una función conocida.

Por que de los errores de la discretización involucrados en su construcción, la función  $\hat{\phi}$  no podrá en general satisfacer a la Ecuación básica (4.13) punto por punto. Por lo tanto, resulta que algunos errores locales usualmente producen residuos tales como:

$$\varepsilon = A(\hat{\phi}) \neq 0 \quad (4.14)$$

en cualquier punto del dominio. Por otra parte, la Ecuación (4.14) se puede utilizar como una medida de la calidad del ajuste entre  $\hat{\phi}$  y  $\phi$ . De los muchos criterios, basados en la Ecuación (4.14), que podemos introducir para hacer éste ajuste tan cerca como sea posible, los más populares implican la integración de errores locales, o residuales,  $\varepsilon$ . Por ejemplo, puede ser que igualemos a cero la integral de errores sobre el dominio  $\Omega$ .

$$\int_{\Omega} \varepsilon \, d\Omega = \int_{\Omega} A(\hat{\phi}) \, d\Omega = 0 \quad (4.15)$$

para satisfacer a la Ecuación original (4.13) solamente en el sentido promedio.

Este criterio podría ciertamente representar una condición necesaria para la aceptación de una aproximación  $\hat{\phi}$  pero, solamente sobre la Ecuación básica (4.15), por lo que nosotros no podríamos encontrar todos los valores nodales desconocidos  $\phi$ .

Un método general para escribir las  $n$  ecuaciones integrales, el cual permita el cálculo de todos los valores nodales desconocidos, es el método de residuos ponderados. Según la formulación de los residuos ponderados, encontramos el valor de la aproximación  $\hat{\phi}$  en el nodo  $i$ , amplificando los efectos de los errores sobre el área influenciada por  $\phi_i$ . Con la suposición de la aproximación a una pieza deseada, el área de influencia de  $\phi_i$  corresponde a los elementos que comparten el nodo  $i$ .

Por lo tanto, los errores en la Ecuación (4.15) se deben multiplicar por una función ponderada  $W_i$ , que se puede elegir arbitrariamente, mientras pondera apropiadamente los errores sobre los elementos que comparten el nodo  $i$ . Este procedimiento se asegura de que cada integral alcance un valor de cero sobre una sub-región limitada en la vecindad del nodo correspondiente, mientras que evita la compensación de errores entre áreas distantes. De ésta manera, de un arreglo de  $r$  funciones independientes  $W_i$ , obtenemos  $r$  ecuaciones integrales independientes, tales como:

$$\int_{\Omega} W_i A(\hat{\phi}) d\Omega = \int_{\Omega} W_i L(\hat{\phi}) d\Omega + \int_{\Omega} W_i g d\Omega = 0 \quad (4.16)$$

con  $i = 1, r$

En algunos problemas es conveniente llevar a cabo la integración por partes usando la formulación de Green para obtener, en lugar de la Ecuación (4.16), un estado alternativo de la integral la cual contenga a las derivadas de bajo orden. Para alcanzar este objetivo, podemos usar la función ponderación  $W_i$  en la Ecuación (4.13) sobre un dominio  $\Omega$ , obteniendo una integral de estado similar a la Ecuación (4.16) en el cual  $\phi$  reemplaza a  $\hat{\phi}$ .

En esas ecuaciones, podemos sustituir al término  $L(\phi)$  por una expresión alternativa producida por el teorema de Green.

Por ejemplo, si tenemos  $L(\phi) = \nabla \cdot (\Gamma \nabla \phi)$  donde  $\Gamma$  es una propiedad de transporte conocida, por lo que se puede escribir:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} W_i L(\phi) d\Omega &= \int_{\Omega} W_i \nabla \cdot (\Gamma \nabla \phi) d\Omega \\ &= - \int_{\Omega} \nabla W_i \cdot (\Gamma \nabla \phi) d\Omega + \int_S W_i (\Gamma \nabla \phi) \cdot n dS \\ &= - \int_{\Omega} \nabla W_i \cdot (\Gamma \nabla \phi) d\Omega - \int_S W_i q'' dS \end{aligned} \quad (4.17)$$

donde  $q'' = -(\Gamma \nabla \phi) \cdot n$  es la componente normal de un flujo específico generalizado en la frontera  $S$ . El estado alternativo final de la integral para la Ecuación (4.16) puede ser obtenido utilizando la Expresión (4.17) y sustituyendo el potencial desconocido  $\phi$  con su aproximación  $\hat{\phi}$ . De esta manera obtenemos las  $n$  ecuaciones integrales independientes siguientes:

$$- \int_{\Omega} \nabla W_i \cdot (\Gamma \nabla \hat{\phi}) d\Omega - \int_S W_i \hat{q}'' dS + \int_{\Omega} W_i g d\Omega = 0 \quad (4.18)$$

donde los primeros dos términos corresponden a la primera integral del lado derecho de la Ecuación (4.16) y  $\hat{q}''$  es la representación aproximada del flujo de calor específico  $q''$ . En la Ecuación (4.18) ambos  $\nabla W_i$  y  $\nabla \hat{\phi}$  contienen en general, a las derivadas de bajo orden que aparecen dentro de  $L(\phi)$ . Sin embargo, en la Ecuación (4.18) un orden de continuidad mas alto que en la Ecuación (4.16) es necesario para especificar la función ponderada  $W_i$ , pero un orden de continuidad mas bajo es demandado para la solución aproximada  $\hat{\phi}$  y, por consiguiente, para las funciones de forma  $N_i$ . Si, en forma concreta, nos referimos a un problema estacionario de conducción de calor, para lo cual se puede escribir la Ecuación (4.18) como:

$$-\int_{\Omega} \nabla W_i \cdot (k \nabla \hat{T}) d\Omega - \int_S W_i \hat{q}'' dS + \int_{\Omega} W_i \dot{q} d\Omega = 0 \quad (4.19)$$

o en coordenadas Cartesianas en dos dimensiones como:

$$-\int_{\Omega} \left[ \frac{\partial W_i}{\partial x} \left( k \frac{\partial \hat{T}}{\partial x} \right) + \frac{\partial W_i}{\partial y} \left( k \frac{\partial \hat{T}}{\partial y} \right) \right] d\Omega - \int_S W_i \hat{q}'' dS + \int_{\Omega} W_i \dot{q} d\Omega = 0 \quad (4.20)$$

En las Ecuaciones (4.18) a (4.20) ahora tenemos términos límite que se puedan utilizar para introducir condiciones de frontera de una manera natural. En cambio, sobre la frontera de  $S_i$ , donde los valores de las temperaturas han sido prescritos, las integrales de frontera pueden ser interpretadas como una razón nodal desconocida de transferencia de calor, la cual equilibra la distribución de las temperaturas dentro del dominio. Tales estados de las Ecuaciones (4.18) a (4.20) son llamados “ formas suaves”, desde que éstos son mas permitidos que los estados de la Ecuación (4.16). De hecho, podemos encontrar soluciones a las Ecuaciones (4.18) a (4.20) las cuales no son solución de la ecuación diferencial original. Por ejemplo, con las derivadas de segundo orden en  $A(\phi)$ , encontramos las soluciones de las Ecuaciones (4.18) a (4.20), las cuales necesitan ser derivadas solamente una vez. Por otro lado, las funciones  $W_i$  usadas en las Ecuaciones (4.18) a (4.20) tienen que ser derivadas una vez, pero usualmente, esto no es considerado como una seria limitación para preferir una adecuada función de ponderación.

Por consiguiente, en el contexto general de las de aproximaciones de solución, las formas suaves de las ecuaciones de la integral son mas convenientes desde un punto de vista computacional. Los estados de la integral, tales como las Ecuaciones (4.18) a (4.20), son la base del método del elemento finito. En éste contexto, la clave para la discretización es la propiedad matemática la cual permite el cálculo de las integrales sobre el dominio entero y sobre la frontera externa por medio de integrales sobre el subdominio y la porción de las fronteras. De acuerdo a esta propiedad se puede escribir que:

$$\int_{\Omega} (\dots) d\Omega + \int_S (\dots) dS = \sum_{e=1}^m \int_{\Omega^e} (\dots) d\Omega + \sum_{e=1}^m \int_{S^e} (\dots) dS \quad (4.21)$$

donde el sub-dominio son los elementos  $\Omega^e$  y la porción de las fronteras externas  $S^e$  son las fronteras, sobre  $S$ , del elemento externo. Una situación típica, referida a la Ecuación (4.21) es ilustrada en la Figura 4.3.

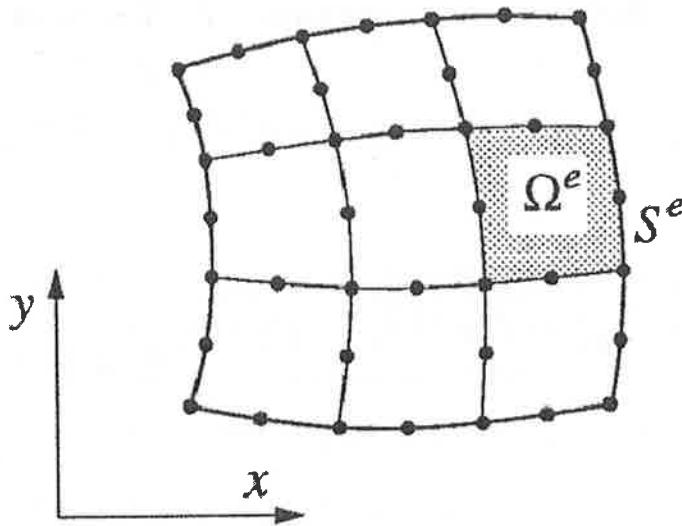


Figura 4.3 Dominio subdividido a dos dimensiones dentro de un número finito de elementos.

#### 4.1.2 Método de Diferencias Finitas

Como se vio en puntos anteriores, los métodos analíticos pueden ser usados, en ciertos casos de soluciones matemáticas exactas para un estado estable, y para problemas de conducción de calor en dos dimensiones. Estas soluciones han sido generadas por un surtido de simples geometrías y condiciones de frontera, las cuales están bien documentadas en la literatura [39, 114, 115, 116]. Sin embargo, la mayoría de las veces, los problemas en dos dimensiones involucran geometrías y /o condiciones de frontera que impide tales soluciones. En estos casos, la mejor alternativa es a menudo una que usa una técnica numérica tal como: los métodos de diferencias finitas, elementos finitos o elementos frontera. Porque de su fácil aplicación, el método de diferencias finitas es

muy adecuado para una introducción en el tratamiento de técnicas numéricas. En contraste para una solución analítica, se permite la determinación de la temperatura en algún punto de interés dentro de un medio; una solución numérica nos permite la determinación de la temperatura únicamente en los puntos *independientes*. El primer paso en cualquier análisis numérico debe por consiguiente seleccionar esos puntos. Refiriéndonos a la Figura 4.4, ésta fue realizada con subdivisiones en el medio de interés dentro de un número pequeño de regiones y asignándoles a cada punto de referencia un punto en su centro. El punto de referencia esta frecuentemente referido a un *punto nodal* (o simplemente a un *nodo*), y el conjunto de puntos está referido a una *red nodal, reja o malla*. Los puntos nodales están designados por un plano numérico que, para un sistema de dos dimensiones, puede tomar la forma mostrada en la Figura (4.4a). La localización de  $x$  y de  $y$  están designadas por los subíndices  $m$  y  $n$ , respectivamente.

Cada nodo representa una cierta región, y su temperatura es medida de la temperatura *promedio* de la región. Por ejemplo, la temperatura del nodo  $m, n$  de la Figura (4.4a) puede ser visto como el promedio de la temperatura alrededor del área sombreada. La selección del punto nodal es relativamente arbitraria, dependiendo a menudo del material tal como una conveniente geometría y la precisión deseada.

La precisión numérica de los cálculos depende fuertemente del número de puntos nodales designados. Si éste número es largo (una *malla fina*) una solución precisa puede ser obtenida.

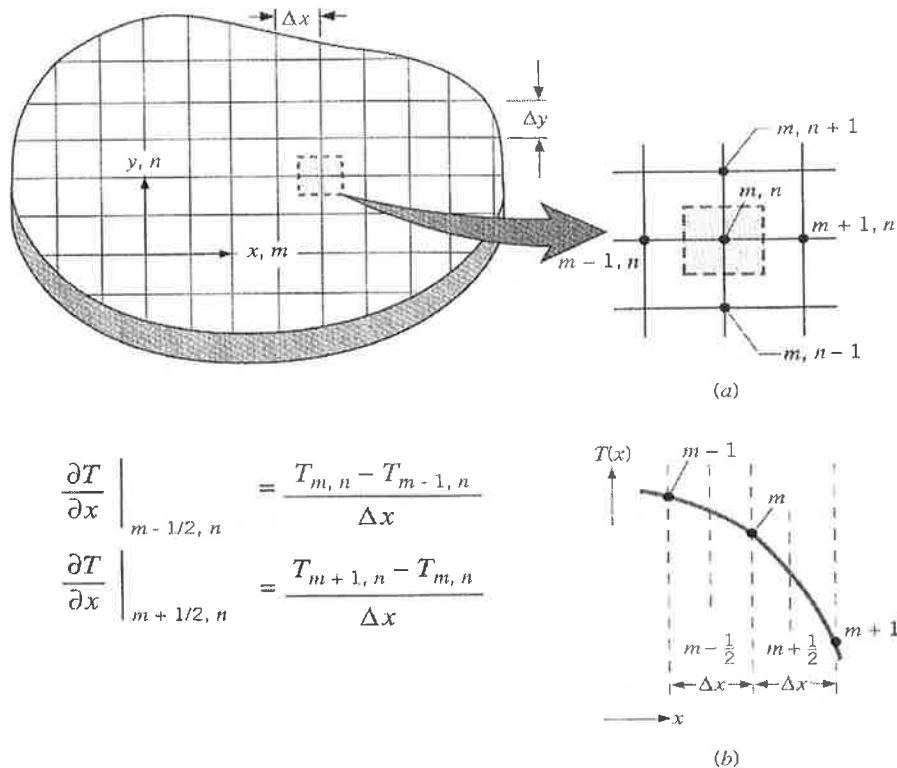


Figura 4.4 Conducción en dos dimensiones. (a) Red nodal, (b) Aproximación por diferencias finitas.

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{m-1/2, n} = \frac{T_{m, n} - T_{m-1, n}}{\Delta x} \quad (4.22)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{m+1/2, n} = \frac{T_{m+1, n} - T_{m, n}}{\Delta x} \quad (4.23)$$

La determinación de la distribución de la temperatura dicta numéricamente que una ecuación apropiada de la conservación está escrita para *cada* uno de los puntos nodales de temperatura desconocida. El sistema que resulta de las ecuaciones puede entonces solucionarse simultáneamente para la temperatura de cada nodo. Para *cualquier nodo interior* de un sistema en dos dimensiones sin la generación de calor y la conductividad térmica uniforme, la forma *exacta* de la conservación de la energía requerida está dada por la ecuación de calor,  $\partial^2 T / \partial x^2 + \partial^2 T / \partial y^2$ .

Sin embargo, si el sistema se caracteriza en términos de una red nodal, es necesario trabajar con una *aproximación* o con *diferencias finitas* la forma de esta ecuación.

Una ecuación en diferencias finitas que es conveniente para los nodos interiores de un sistema de dos dimensiones se puede deducir directamente de la ecuación  $\partial^2 T / \partial x^2 + \partial^2 T / \partial y^2$ . Considerando la segunda derivada  $\partial^2 T / \partial x^2$ . De la Figura 4.4b, el valor de esta derivada en el punto nodal  $m, n$  se puede aproximar como:

$$\left. \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right|_{m,n} \approx \frac{\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{m+1/2,n} - \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{m-1/2,n}}{\Delta x} \quad (4.24)$$

Los gradientes de la temperatura se pueden alternadamente expresar en función de las temperatura nodales. Esto es,

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{m+1/2,n} \approx \frac{T_{m+1,n} - T_{m,n}}{\Delta x} \quad (4.25)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{m-1/2,n} \approx \frac{T_{m,n} - T_{m-1,n}}{\Delta x} \quad (4.26)$$

Substituyendo las Ecuaciones (4.25) y (4.26) en la Ecuación (4.24), obtenemos:

$$\left. \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right|_{m,n} \approx \frac{T_{m+1,n} + T_{m-1,n} - 2T_{m,n}}{(\Delta x)^2} \quad (4.27)$$

Procediendo en forma similar, esto muestra que

$$\left. \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right|_{m,n} \approx \frac{\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{m,n+1/2} - \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{m,n-1/2}}{\Delta y}$$

$$\approx \frac{T_{m,n+1} - T_{m,n-1} - 2T_{m,n}}{(\Delta y)^2} \quad (4.28)$$



Usando una red para lo cual  $\Delta x = \Delta y$  y substituyendo las Ecuaciones (4.27) y (4.28) dentro de la Ecuación  $\partial^2 T / \partial x^2 + \partial^2 T / \partial y^2$ , obtenemos la ecuación siguiente:

$$T_{m,n+1} + T_{m,n-1} + T_{m+1,n} + T_{m-1,n} - 4T_{m,n} \quad (4.29)$$

Por lo tanto para el nodo  $m, n$  la ecuación de calor, que es una *ecuación diferencial exacta*, se reduce a una ecuación algebraica aproximada. Esta aproximación, *en forma de diferencias finitas de la ecuación de calor* se puede aplicar a cualquier nodo interior que sea equidistante de sus 4 nodos vecinos. Esto simplemente requiere que la suma de las temperaturas asociadas con los nodos vecinos sean 4 veces la temperatura del nodo de interés. Una vez que la red nodal ha sido establecida y una apropiada ecuación por diferencias finitas ha sido escrita para cada nodo, la distribución de la temperatura puede ser determinada. El problema se reduce a resolver un sistema lineal, de ecuaciones algebraicas.

Numerosos métodos están disponibles para este propósito y pueden ser clasificados de acuerdo a que ellos son *directos o iterativos*. Los métodos directos involucran un número predeterminado y fijo de operaciones aritméticas y son adecuados para usarse cuando el número de ecuaciones (temperaturas nodales desconocidas) es pequeño. Sin embargo, tales métodos están asociados a una memoria de calculo muy grande y requieren de mucho tiempo por lo cual a menudo es mas eficiente usar una técnica iterativa. Aunque el número de operaciones aritméticas reducidas no pueden ser predeterminadas, los métodos iterativos están caracterizados por reducir los tiempos en la computadora y son especialmente apropiados cuando el número de ecuaciones es muy grande.

Las soluciones analíticas para problemas en transferencia de calor están restringidos a simples geometrías y a condiciones de frontera, sin embargo en algunos casos las geometrías o las condiciones de frontera evitan el uso de las técnicas analíticas, por lo que se debe recurrir a métodos de *diferencias finitas* (ó *elemento finito*).

En el punto 4.4.2 consideraremos las formas *explícita e implícita* de soluciones en diferencias finitas para problemas transitorios de conducción.

#### 4.1.3 Método de Volumen de Control

La discretización de las ecuaciones requeridas puede ser derivada para un instante por varios caminos, como pudiéramos mencionar:

- 1.- La formulación de las series de Taylor
- 2.- La formulación variacional
- 3.- El método de la ponderación de los residuos
- 4.- La formulación del Volumen de Control

A menudo los textos elementales sobre transferencia de calor derivan la ecuación por diferencias finitas vía el método de las series de Taylor y entonces demuestran que la ecuación resultante es consistente con el balance de energía sobre una pequeña región en los alrededores del punto de la malla. Nosotros también observamos que la formulación de volumen de control puede ser considerada como una versión especial del método de residuos ponderados. La idea básica de la formulación del volumen de control es fácil de entender y se presta para una interpretación física directa. El dominio de cálculo está dividido dentro de un número de volúmenes de control no superpuestos tal que hay un volumen de control alrededor de cada punto de la malla. La ecuación diferencial es integrada sobre cada volumen de control. Los perfiles expresan la variación de  $\phi$  entre los puntos de la malla que son usados para evaluar las integrales requeridas. El resultado de la discretización de la ecuación contiene los valores de  $\phi$  para un grupo de puntos de la malla. La discretización de la ecuación de esta manera obtenida expresa el principio de conservación para  $\phi$  en un volumen de control finito, justo como lo expresa la ecuación diferencial para un volumen de control infinitesimal.

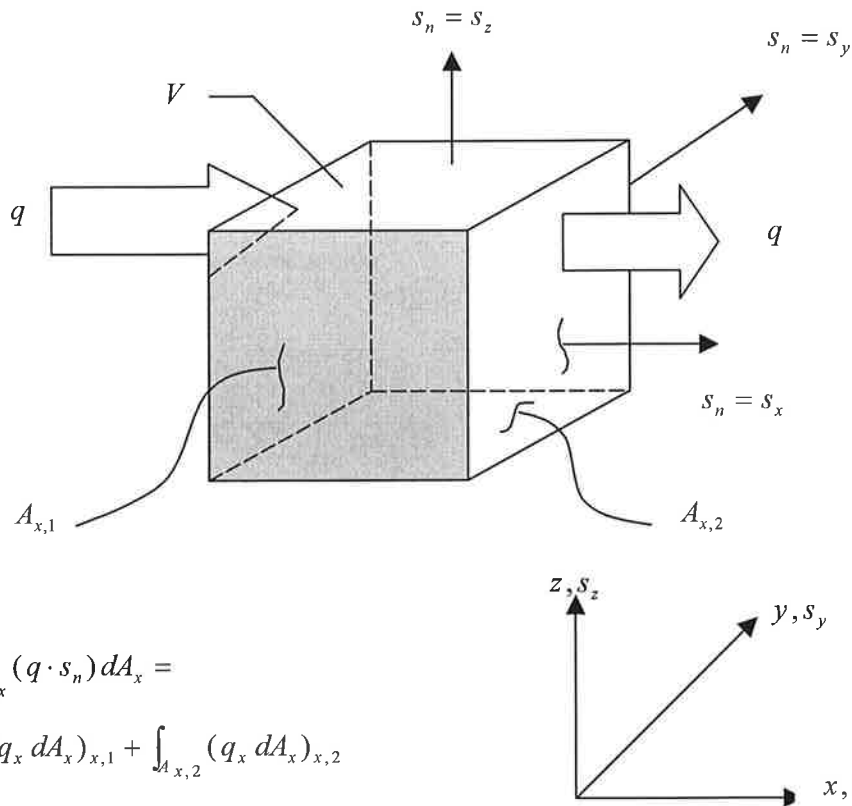
La mas atractiva característica de la formulación de volumen de control es que la solución resultante puede implicar que la *integral* de conservación de tales cantidades como la masa, el momento y la energía son satisfechas exactamente sobre algún grupo de volúmenes de control, por supuesto, sobre el dominio entero de cálculo. Esta

característica existe para *algún* número de puntos en la malla, no como en el sentido de limitarla cuando el número de puntos de la malla llegan a hacer numeroso. Por consiguiente, la constante solución de la malla áspera exhibe el balance integral *exacto*.

Cuando la discretización de las ecuaciones están resueltas para obtener los valores en los puntos de la malla de la variable dependiente, el resultado puede ser visto de dos modos diferentes. En el método de elemento finito y en la mayoría de los métodos de residuos ponderados, la variación asumida de  $\phi$  consiste en valores de puntos de la malla y la función de interpolación (o perfiles) entre los puntos de la malla que son tomados como una aproximación de la solución.

En el método por diferencias finitas, sin embargo, solamente los valores de los puntos de la malla de  $\phi$  están considerados para continuar con la solución, sin ninguna referencia explícita como para saber como varía  $\phi$  entre los puntos de la malla. Esto es, semejante a un laboratorio experimental donde la distribución de una cantidad es obtenida en términos de valores medibles en alguna localización discreta sin alguna declaración sobre la variación *entre* esas localizaciones. En nuestra aproximación de volumen de control, adoptamos esta opinión. Además se buscarán los valores de la solución en los puntos de la malla solamente. Las formulas de interpolación o de los perfiles serán estimados con relaciones auxiliares necesarias para evaluar las integrales requeridas en la formulación. Una vez que las ecuaciones de discretización son derivadas, las suposiciones de los perfiles pueden ser olvidados. Por lo que éste punto de vista permite completar libremente la elección empleando, si se desea, diferentes perfiles para los diferentes términos de integración en la ecuación diferencial. En la Figura 4.5 se muestra el flujo de calor que entra y que sale de un volumen de control con una cierta dirección del mismo.

El método que será nuestro principal foco de atención en este documento, el cual tiene la apariencia del método de diferencias finitas, pero éste emplea algunas ideas que son típicas del método del elemento finito. Esta distinción entre estos 2 métodos resulta el camino de selección de los perfiles y la derivación de la discretización de las ecuaciones.



$$Q_x = \int_{A_x} (q \cdot s_n) dA_x = - \int_{A_{x,1}} (q_x dA_x)_{x,1} + \int_{A_{x,2}} (q_x dA_x)_{x,2}$$

Figura 4.5 Flujo de calor neto dentro y fuera de un volumen de control, en la dirección de x.

#### 4.1.4 Ecuaciones de Transporte

Considere por pedazos el perfil sobre el punto de la malla mostrado en las Figuras 4.6 y 2.1, enfocando su atención sobre el punto mallaado P, el cual tiene los puntos como sus vecinos E y W mallaados. Las líneas discontinuas muestran las caras del volumen de control; su localización exacta es muy importante para el comienzo del tiempo. Las letras e y w denotan esas caras. La ecuación diferencial es integrada sobre cada volumen de control. Los pedazos de los perfiles que expresan la variación de los parámetros

dependientes entre los puntos de la malla son usados para evaluar las integrales requeridas. El resultado es la discretización de la ecuación conteniendo los valores del parámetro dependiente para un grupo de puntos en la malla. Considerar la forma de integrar la transferencia de calor difusivo inestable en la Ecuación (2.56), sobre un volumen de control y el intervalo de paso en el tiempo  $\Delta t = [t^n, t^{n+1}]$ , por lo que resulta la ecuación siguiente:

$$c \int_w^e \int_{t^n}^{t^{n+1}} \frac{\partial(\rho T)}{\partial t} dt dx = \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_w^e \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx dt + \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_w^e b dx dt \quad (4.30)$$

Similarmente, la integración temporal sobre el termino capacitancia dado por la Ecuación (3.5) da la siguiente ecuación:

$$c = \frac{\int_w^e \int_{t^n}^{t^{n+1}} \frac{\partial}{\partial t} (\rho h) dt dx + \sum_{i=1}^f \int_{\Omega^i} \rho h d\Omega^i}{\int_w^e \int_{t^n}^{t^{n+1}} \frac{\partial}{\partial t} (\rho T) dt dx} \quad (4.31)$$

donde  $\Omega^i = \int_{\Omega^i} d\Omega^i = \int_{t^n}^{t^{n+1}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_i dt$  es el dominio generado por el transporte advectivo inducido por el campo de velocidad convectiva del material  $\mathbf{v}$  en la cual el material es transportado. La Figura 4.7 muestra el dominio advectivo  $\Omega^i$ , donde el subíndice  $i$  denota el número de cara y la  $f$  significa el número de caras de un elemento arbitrario, por ejemplo  $f = 2$  para un volumen de control en 1-D. La solución de la integral de dominio advectivo se realiza analíticamente; donde los detalles se dan en las secciones 4.2.1 y 4.2.2. Los campos de temperatura son calculados después de completar las Ecuaciones (4.30) y (4.31). El método es llamado método de capacitancia de volumen de control; para mas detalles ver la sección 4.6.

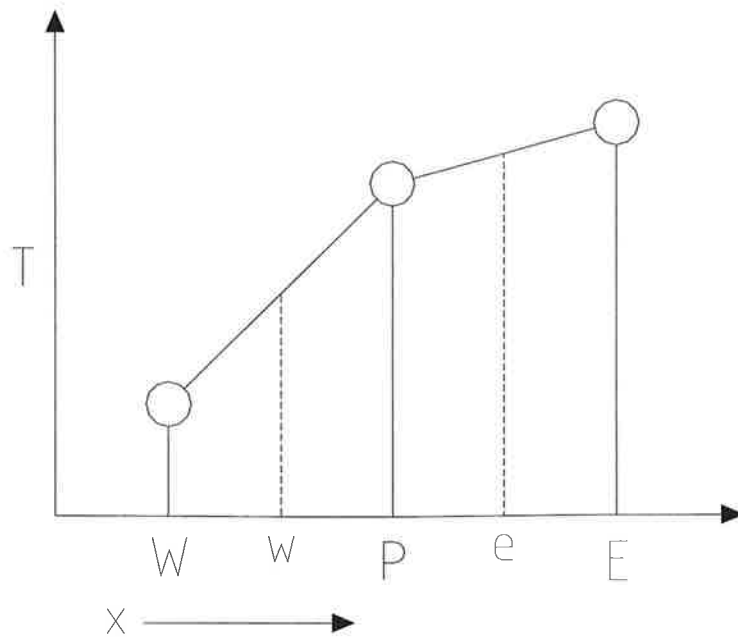


Figura 4.6 Subdivisión de la aproximación lineal de la temperatura.

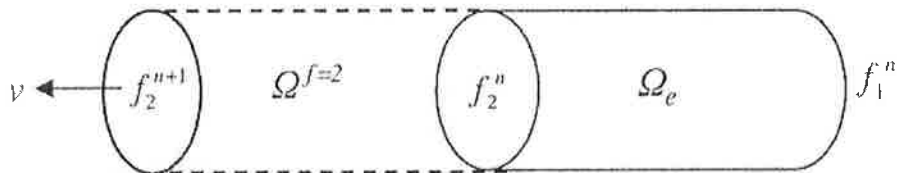


Figura 4.7 Dominio advectivo del material  $\Omega_f$ .

## 4.2 Procedimiento de Integración

Considerar el tiempo como una coordenada unidireccional, la solución es obtenida marcando en un tiempo la distribución de temperatura inicial dada. Así en un paso de tiempo típico, la tarea es esta: Dados los valores de los puntos de la malla  $T$  en un tiempo arbitrario se encuentran los valores de  $T$  en un tiempo  $t + 1$ . Los valores viejos de  $T$  en los puntos de la malla serán denotados por  $T_p^n, T_E^n, T_W^n$ , y los nuevos valores en el tiempo  $t + 1$  (desconocidos) por  $T_p^{n+1}, T_E^{n+1}, T_W^{n+1}$ . Sin embargo, para la representación de las derivadas  $\partial T / \partial t$  se asume que el valor de los puntos de la malla de  $T$  prevalecen a través del volumen de control. Donde después de aplicar algunas manipulaciones algebraicas sobre el término inestable tenemos lo siguiente:

$$c \int_w^e \int_{t^n}^{t^{n+1}} \frac{\partial (\rho T)}{\partial t} dt dx = \rho c \Delta x (T_p^{n+1} - T_p^n) \quad (4.32)$$

Similarmente para el término de conducción tenemos lo siguiente:

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_w^e \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx dt = k \Delta t \left[ \frac{T_E - T_p}{\delta x_e} - \frac{T_p - T_W}{\delta x_w} \right] \quad (4.33)$$

Si el término fuerza del cuerpo es despreciable, los campos de temperatura pueden ser calculados con la expresión de discretización de la referencia [43], lo que nos lleva a la ecuación siguiente:

$$\rho c \Delta x (T_p^{n+1} - T_p^n) = k \Delta t \left[ \frac{T_E - T_p}{\delta x_e} - \frac{T_p - T_W}{\delta x_w} \right] + b_p \Delta x \Delta t \quad (4.34)$$

Esta ecuación, la cual es también la ecuación de discretización de la Ecuación (2.56), es similar a la ecuación estándar de conducción de calor parabólica pero con efectos de convección incrustados dentro de la capacitancia. Una ventaja principal de la Ecuación (4.34) es que la simetría del sistema de ecuaciones se mantiene.

Similarmente, la capacitancia dada en la Ecuación (4.31) puede ser calculada sobre el volumen de control en 1-D con la expresión:

$$c = \frac{\rho(h^{n+1} - h^n) \Delta x + \rho v \Delta t (\bar{h}_e - \bar{h}_w)}{\rho(T^{n+1} - T^n) \Delta x} \quad (4.35)$$

donde  $\int_{\Omega^1} \rho h d\Omega^1 = -\rho v \Delta t \bar{h}_w$  y  $\int_{\Omega^2} \rho h d\Omega^2 = \rho v \Delta t \bar{h}_e$

#### 4.2.1 Integrales de Relaciones de Entalpía

El cálculo de  $c$  sobre un volumen de control también requiere la solución de las integrales de entalpía de la forma:  $\int_w^e \rho^n h^n dx$  y  $\int_w^e \rho^{n+1} h^{n+1} dx$ , sobre el intervalo de paso en el tiempo  $[t_n, t_{n+1}]$ . Para un dominio sólido, es prácticamente común usar una aproximación lineal de la entalpía volumétrica, como por ejemplo;

$$\bar{h} = \rho h = \rho h_{sol} + \rho c (T - T_{sol}) \quad \text{si } T < T_{sol} \quad (4.36)$$

por lo que tenemos que para un tiempo  $t^n$ , después de algunas manipulaciones algebraicas:

$$\int_w^e \rho^n h^n dx = M_e^n h_{sol} + \rho c \int_e^w (T^n - T_{sol}) dx \quad (4.37)$$

Donde  $M_e^n$  representa la masa del volumen de control  $e$  en un tiempo  $n$  y  $h_{sol}$  es la entalpía del sólido. Una expresión similar puede ser obtenida para  $\int_w^e \rho^{n+1} h^{n+1} dx$ .

La determinación de la integral advectiva  $\int_{\Omega^i} \rho h d\Omega^i$  para un volumen de control en 1-D está dada por la siguiente ecuación:



$$\int_{\Omega_e^i} \rho h d\Omega^i = (-1)^i \left[ M^i h_{sol} + \rho c v \int_{t_n}^{t_{n+1}} (T_i - T_{sol}) dt \right] \quad (4.38)$$

Donde  $M^i$  es simplemente la masa del material que pasa a través de la cara  $\Delta^i$  sobre el intervalo de tiempo  $[t_n, t_{n+1}]$ .

#### 4.2.2 Campos de las Integrales de Temperatura

El cálculo de las integrales de los campos de la entalpía requieren una solución de la forma  $\int_w^e T^n dx$  y  $\int_w^e T^{n+1} dx$ . Para un instante, el volumen de control en 1-D lineal sigue la integración analítica de la integral de temperatura siguiente:

$$\int_w^e T^n dx = \frac{\Delta x}{2} [T_w^n + T_e^n] \quad (4.39)$$

Una expresión similar puede ser obtenida para  $\int_w^e T^{n+1} dx$ .

El cálculo de las integrales de la forma  $\int_{t_n}^{t_{n+1}} (T_i - T_{sol}) dt$  presentadas en la Ecuación (4.38) dan las siguientes soluciones:

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} (T_1 - T_{sol}) dt = \left[ \frac{T_w^n + T_w^{n+1}}{2} - T_{sol} \right] \Delta t \quad y \quad (4.40)$$

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} (T_2 - T_{sol}) dt = \left[ \frac{T_e^n + T_e^{n+1}}{2} - T_{sol} \right] \Delta t$$

### 4.3 Integración Directa en el Tiempo

Para este caso se debe de establecer un procedimiento adicional para la integración en el tiempo. En la actualidad existen algunos métodos generales para sistemas de integración en el tiempo de ecuaciones diferenciales ordinarias tales como la discretización espacial de problemas inestables y axi-simétricos. Uno de los más populares involucra la aplicación de técnicas de diferencias finitas estándar. Dentro de este contexto la solución es buscada solamente en los puntos del tiempo discreto, espaciados en un intervalo de tiempo finito  $\Delta t$  de cada uno. El esquema de la integración consiste en una construcción secuencial de valores de la solución, comenzando de las condiciones iniciales y continuando en los tiempos  $\Delta t, 2\Delta t, n\Delta t, (n+1)\Delta t$ . Asumiendo que la solución es conocida para el tiempo  $t$ , los cálculos pueden ser llevados a cabo para obtener una nueva solución para el tiempo  $t + \Delta t$ .

Para ilustrar el procedimiento de la integración directa en el tiempo, consideremos la ecuación diferencial de la matriz mas general en el espacio discretizado, la cual se obtuvo al discretizar la ecuación de transporte en un espacio de dos dimensiones como:

$$C \dot{\phi} + \bar{K} \phi = \bar{s} + x \quad (4.41)$$

Donde la matriz  $\bar{K}$  es la suma de las contribuciones homogéneas

$$\bar{K} = A + B + J + K \quad (4.42)$$

Y el vector  $\bar{s}$  es la suma de las contribuciones no homogéneas conocidas

$$\bar{s} = s - p - d \quad (3.43)$$

En la expresión arriba descrita,  $C$  es la matriz de capacitancia,  $K$  es la matriz de conductancia,  $A$  es la matriz de advección,  $J$  es la fuente relacionada a la divergencia del campo de velocidad, la matriz  $B$  y el vector  $d$  son las contribuciones homogénea y no homogénea surgidas de las condiciones de la frontera de la convección, el vector  $p$  es la contribución no homogénea surgida de las condiciones de frontera de Newmann, y el vector  $x$  contiene las contribuciones no homogéneas desconocidas. Un esquema simple de la integración en el tiempo para la Ecuación (4.41) puede ser fácilmente derivada asumiendo que  $C$ ,  $\bar{K}$ , y  $\bar{s}$  son constantes. En tal caso, la Ecuación diferencial de la matriz (4.41) puede ser discretizada en el tiempo como:

$$C \frac{\phi^{n+1} - \phi^n}{\Delta t} + \alpha \bar{K} \phi^{n+1} + (1 - \alpha) \bar{K} \phi^n = \bar{s} + x \quad (4.44)$$

Donde  $\phi^n$  y  $\phi^{n+1}$  son los vectores de los valores nodales desconocidos en los tiempos  $n \Delta t$  y  $(n+1) \Delta t$  respectivamente, mientras que  $\alpha$  es un factor del residuo ponderado entre 0 y 1. En la Ecuación (4.44) usamos la aproximación estándar para la derivada en el tiempo:

$$\dot{\phi} \cong \frac{\phi^{n+1} - \phi^n}{\Delta t} \quad (4.45)$$

Y como una consecuencia, expresamos el tiempo  $\bar{K} \phi$  como un sobrepeso promedio entre los valores en el tiempo  $n \Delta t$  y  $(n+1) \Delta t$ . La Ecuación discretizada (4.44) puede ser escrita como:

$$\left( \frac{1}{\Delta t} C + \alpha \bar{K} \right) \phi^{n+1} = \left[ \frac{1}{\Delta t} C - (1 - \alpha) \bar{K} \right] \phi^n + \bar{s} + x \quad (4.46)$$

Y puede también ser reordenada en una forma general final como:

$$H \phi^{n+1} = f^n + x \quad (4.47)$$

En la Ecuación (4.47) la matriz de rigidez  $H$  es la suma de todas contribuciones homogéneas

$$H = \frac{1}{\Delta t} C + \alpha \bar{K} \quad (4.48)$$

y el vector de carga  $f^n$  es la suma de todas las contribuciones no homogéneas

$$f^n = \left[ \frac{1}{\Delta t} C - (1 - \alpha) \bar{K} \right] \phi^n + \bar{s} \quad (4.49)$$

Las Ecuaciones (4.46) y (4.47) producen una familia de algoritmos general de la integración en el tiempo, los cuales difieren solamente para elegir el valor de  $\alpha$ . Para  $\alpha = 0$  las Ecuaciones (4.46) y (4.47) dan el método de integración de diferencias finitas hacia delante de Euler, en el cual tenemos:

$$H = \frac{1}{\Delta t} C \quad (4.50)$$

y

$$f^n = \left( \frac{1}{\Delta t} C - \bar{K} \right) \phi^n + \bar{s} \quad (4.51)$$

El método de Euler se dice que es un método explícito por que el término  $\bar{K} \phi$  en la Ecuación (4.41) está evaluado en el comienzo del intervalo del tiempo  $\Delta t$ . Para  $\alpha = 1$ . Las Ecuaciones (4.46) y (4.47) dan el método implícito completo de diferencias finitas hacia a tras en el cual tenemos

$$H = \frac{1}{\Delta t} C + \bar{K} \quad (4.52)$$

y

$$f^n = \frac{1}{\Delta t} C \phi^{n+\bar{s}} \quad (4.53)$$

desde que el término en el tiempo  $\bar{K} \phi$  en la Ecuación (4.41) está evaluado al final del intervalo de tiempo final  $\Delta t$ . De las Ecuaciones (4.46) y (4.47), para  $\alpha = 1/2$  obtenemos el esquema de Crank Nicolson en el cual tenemos

$$H = \frac{1}{\Delta t} C + \frac{1}{2} \bar{K} \quad (4.54)$$

$$f^n = \left( \frac{1}{\Delta t} C - \frac{1}{2} \bar{K} \right) \phi^{n+\bar{s}} \quad (4.55)$$

Mientras que para  $\alpha = 2/3$  obtenemos el esquema Galerkin en el cual tenemos:

$$H = \frac{1}{\Delta t} C + \frac{2}{3} \bar{K} \quad (4.56)$$

Ambos esquemas el Crank Nicolson y el Galerkin pertenecen a la familia general de algoritmos implícitos. El valor que se elija para  $\alpha$  influenciará a la estabilidad y a la precisión en los resultados numéricos.

## 4.4 Estabilidad, Precisión y Divergencia

La estabilidad es el primer tema cuando procedimientos directos de integración en el tiempo se utilizan para obtener la solución de ecuaciones diferenciales de una matriz. Con referencia a la Ecuación general (4.46) podemos decir que, para  $\alpha = 1/2$ , tenemos restricciones de estabilidad, desde que las oscilaciones en la solución son incontrolables si los incrementos  $\Delta t$  son más grandes que algunos valores permisibles. En cambio, para  $\alpha \geq 1/2$  en la Ecuación (4.46), se obtienen esquemas recurrentes los cuales son incondicionalmente estables. Esta estabilidad incondicional no evita oscilaciones, pero ésta garantiza que las oscilaciones no crezcan fuera de control. De hecho el esquema libre de oscilaciones solamente es el método implícito completo con ( $\alpha = 1$ ) mientras, que para todos los valores  $1/2 \leq \alpha \leq 1$ , el esquema implícito oscila si el paso en el tiempo es muy grande.

En el contexto general de los métodos de elemento finito, las restricciones de estabilidad pueden ser determinadas fácilmente analíticamente solamente para dominios unidimensionales subdivididos en elementos lineales de tamaño uniforme. En tal caso, encontramos por ejemplo, que, para la conducción transitoria del calor, el límite de la estabilidad del algoritmo implícito ( $\alpha = 0$ ) es

$$\Delta t \leq \frac{1}{6} \frac{(\Delta L)^2}{a} \quad (4.57)$$

Donde  $\alpha = k/\rho c$  es la difusividad térmica y  $\Delta L = L^e$  es la longitud de los elementos. Similarmente, para la convección transitoria gobernada por la ecuación de la energía, encontramos que el algoritmo explícito, en adición al límite de la Ecuación (4.57), presenta también una restricción de la forma:

$$\Delta t \leq 2 \frac{\alpha}{v^2} \quad (4.58)$$

Donde  $v$  es la velocidad.

La estabilidad no es solamente un parámetro de referencia para juzgar los procedimientos numéricos. Para el ingeniero es importante conocer el orden de precisión alcanzable con una cierta finura la subdivisión del dominio. En casos particulares los errores pueden ser evaluados por comparación con soluciones exactas conocidas pero, en situaciones generales solamente una cruda estimación puede ser obtenida “a priori” de bien conocidos procedimientos analíticos. Por ejemplo, la solución para una función conocida de 2 dimensiones  $\phi$  puede ser expandida localmente en la vecindad de un punto de referencia como:

$$\phi(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = \phi_0 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_0 \Delta x + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)_0 \Delta y + \dots \quad (4.59)$$

Si se producen funciones de forma, como aproximaciones polinomiales de grado  $p$  las cuales son usadas para representar a  $\hat{\phi}$ , esta expansión de las series de Taylor puede ser reproducida exactamente igual al término de grado  $p$ . Entonces dentro de un elemento de dimensión típica  $\Delta L$ , podemos decir que el error es del orden de:

$$E_{\Delta L} = [(\Delta L)^{p+1}] \quad (4.60)$$

Para la función de aproximación  $\hat{\phi}$  y de un orden menor que para la primera derivada de  $\hat{\phi}$ . Por lo que podemos decir que con una función de aproximación lineal, la precisión es de 2<sup>do</sup> orden para las incógnitas y de 1<sup>er</sup> orden para sus derivadas, mientras que para funciones de aproximación cuadráticas, la precisión es de 3<sup>er</sup> orden para las incógnitas y de 2<sup>do</sup> orden para sus primeras derivadas con argumentos similares, desarrollado por el conocido procedimiento de diferencias finitas, se puede estimar también el error en el tiempo de integración. Si  $\Delta t$  indica el paso en el tiempo, el error en la aproximación de derivada del tiempo es del orden de:

$$E_{\Delta t} = (\Delta t) \quad (4.61)$$

ambos para  $\alpha = 1$  y  $\alpha = 0$ , es decir, para el método completamente Implícito y el método implícito de Euler, y de orden de:

$$E_{\Delta t} = [(\Delta t)^2] \quad (4.62)$$

Para  $\alpha = 1/2$  por ejemplo se utiliza el método de Crank Nicolson.

Por lo tanto, la elección de  $\alpha = 1/2$  es buena, desde que ésta corresponde a un algoritmo implícito, el cual es incondicionalmente estable y da una precisión de 2<sup>do</sup> orden para la integración en el tiempo. Por otro lado, diferentes elecciones son también posibles. Por ejemplo, para un valor de  $\alpha = 1$ , obtenemos un Método Completamente Implícito, del cual obtenemos solamente una precisión de primer orden para la integración en el tiempo, pero evita completamente oscilaciones numéricas incluso con grandes pasos de tiempo. Por consiguiente si seleccionamos un valor para  $\alpha = 1/2$ , entonces éste debe ser usado, con un paso de tiempo relativamente pequeño para obtener una solución precisa, en cambio cuando se usa un valor para  $\alpha = 1$  con un paso de tiempo grande se obtiene una solución menos precisa. Como una alternativa, un valor para  $\alpha = 2/3$  es elegido como un buen término para los requerimientos de precisión y estabilidad. El algoritmo explícito, corresponde a una elección de  $\alpha = 0$ , no puede ser recomendado aquí, por que su uso implica una severa limitación en el paso en el tiempo. En adición a los errores de la discretización, ninguna solución por computadora da errores de redondeo derivados del número finito de figuras significativas en la representación de las variables. Los errores de redondeo son significativamente menos usuales que los errores de discretización y, consecuentemente, los errores de discretización pueden con seguridad ser asumidos en una estimación de la precisión total alcanzada.

Como se definió aquí, la precisión es una medida de la eficacia de la aproximación considerada. Para el ingeniero, sin embargo es quizás más importante conocer como acercarse a la respuesta correcta, que es como asegurar la convergencia de la solución aproximada hacia la solución exacta. Desde un punto de vista practico, puede decirse



que, con elementos iso-paramétricos razonablemente deformados, la convergencia siempre ocurre a medida que el tamaño del elemento decrece.

Por consiguiente, con un buen diseño de la malla y con una razonable subdivisión del dominio, se puede siempre esperar una buena precisión de la solución por elementos finitos. Como un punto final, debe puntualizarse que la palabra convergencia está también asociada con la solución iterativa o con el logro del estado estable en la solución marcada en el tiempo.

## 4.5 Procedimiento Numérico

### 4.5.1 Formulación del Elemento Finito

La formulación del elemento finito es desarrollada usando el método de residuos ponderados descrito por Finlayson [38]. Para esto se requiere la integración del producto de la ecuación de gobierno general, obtenida de la Ecuación  $\partial/\partial t(\phi) + \text{div}(v\phi) = -\text{div}(J) + b$  y una función de ponderación arbitraria  $W$ . Esto nos da el producto  $\int_{\Omega} W D(\bar{\phi}) dV = 0$ , donde  $\bar{\phi} \approx \phi$  y el residuo de  $W$  asegura que  $D(\bar{\phi}) \approx 0$ .

Para transferencia de calor, en el dominio  $\Omega$ , sobre la superficie  $\Gamma$ , la formulación está sujeta a la condición inicial  $T(x,0) = T_0$  y a la condición frontera de Cauchy

$$-\int_{\Gamma} W J_r \cdot n d\Gamma = \int_{\Gamma} W [h(T - T_w)] \quad (4.63)$$

Substituyendo los parámetros  $\phi$ ,  $v$ ,  $J$  y  $b$  por  $h$ ,  $T$ ,  $-k\nabla T$  y  $0$ , respectivamente, se encuentra la formulación residual ponderada de la Ecuación de transferencia de calor, la cual es la siguiente:

$$W \left[ \int_{\Omega} \left( \rho c \frac{DT}{Dt} + k\nabla^2 T \right) dV - \int_{\Gamma} [h(T_w - T)] dA \right] = 0 \quad (4.64)$$

donde la función de ponderación mas simple puede ser  $W = 1$ , pero existen diferentes versiones del método, por lo que de la elección de la función de ponderación es el nombre del método resultante. El método de sub-dominios o formulación de volumen de control fue muy popular en el análisis de problemas de capa frontera. Encontramos una relación con el método de diferencias finitas si la solución aproximada, en lugar de ser una sola expresión algebraica sobre el dominio, es construyendo perfiles de temperatura de las piezas deseadas como se muestra en la Figura 4.6, con los valores nodales parámetros desconocidos.

Gran parte del desarrollo del método del elemento finito se basa en perfiles subdivididos usados con un residuo particular ponderado, conocido en la práctica como el Método Galerkin [117]. Estas funciones de ponderación están dadas por  $W = N_j$ , donde  $N$  y  $j$  representan las funciones de forma o de geometría y los nodos del elemento, respectivamente.

Aplicando la función residual Galerkin tenemos:

$$\sum_{i=1}^{M_e} \left[ \frac{DT_i}{Dt} \int_{\Omega_e} \bar{c} N_j N_i dV + T_i \int_{\Omega_e} k \nabla N_j \cdot \nabla N_i dV \right]$$

$$= \sum_{i=1}^{L_e} \left[ \int_{\Gamma_e} N_j \int [h(T_w - T)] dA \right] \quad (4.65)$$

donde  $i = 1, 2, \dots, M_e$  y  $M_e$  es el número de elementos, y el subíndice  $j = 1, 2, \dots, L_e$  y  $L_e$  es el número de caras sobre el elemento  $j$ .

Como resultado, el sistema de ecuaciones de elemento finito es similar al usado para modelar los problemas de conducción de calor, pero ahora con los efectos de transporte incluidos en la Capacitancia. Las temperaturas desconocidas pueden ser determinadas discretizando el tiempo por el método  $\theta$  de un paso. Su representación matricial está dada por la expresión:

$$C^{n+1}T^{n+1} = [\Delta t^n (\theta Q^{n+1} + (1-\theta)Q^n) + C^n T^n - \Delta t^n K^n (\theta T^{n+1} + (1-\theta)T^n)] \quad (4.66)$$

Donde  $C$  y  $K$  son las matrices globales de la Capacitancia y de la Conductividad Térmica respectivamente,  $Q$  es un vector asociado a los flujos en la frontera y  $\theta$  es un parámetro especificado que varía entre 0 y 1. Comúnmente se usan cuatro métodos: Cranck Nicolson ( $\theta = 1/2$ ), Galerkin ( $\theta = 2/3$ ), Euler explícito ( $\theta = 0$ ) y Euler implícito ( $\theta = 1$ ). Para asegurar la estabilidad del sistema hemos escogido ( $\theta = 1$ ) (Euler implícito). Para determinar las incógnitas  $T^{n+1}$  para cada intervalo de tiempo, la Ecuación (4.65) se puede resolver simultáneamente con la Ecuación

$$\bar{c} = \int_{\Omega_e} (\rho^{n+1} h^{n+1} - \rho^n h^n) dV + \int_{\Omega_f} h_f d\Omega_h^f / \int_{\Omega_e} (\rho^{n+1} h^{n+1} - \rho^n h^n) dV + \int_{\Omega_f} T_f d\Omega_T^f.$$

El proceso de acoplamiento de las ecuaciones se lleva a cabo en cada intervalo de tiempo donde la solución es iterada hasta la convergencia del método.

El método de sobre relajación sucesiva no lineal se emplea para resolver el conjunto de ecuaciones. Para mejorar la convergencia aplicamos el método de bisección en la capacitancia. Los campos de temperatura se actualizan en cada intervalo de tiempo. La descripción completa del método de solución puede encontrarse en la referencia [7].

#### 4.5.2 Discretización de la Ecuación de Calor por el Método Explícito.

Una vez mas consideraremos el sistema de dos dimensiones de la Figura 4.4 bajo condiciones transitorias con propiedades constantes y sin generación de calor, la forma apropiada de la Ecuación de calor (2.38) es:

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (4.67)$$

Para obtener la forma en diferencias finitas de esta ecuación, podemos usar la aproximación de *diferencias centrales* para las derivadas espaciales preescritas por las Ecuaciones (4.27) y (4.28).

Otra vez los subíndices  $m$  y  $n$  pueden ser usados para designar las localizaciones de  $x$  y  $y$  del *punto nodal discreto*. Sin embargo, en adición para comenzar la discretización en el espacio, el problema debe ser discretizado en el tiempo. El término  $t^n$  es introducido para este propósito, donde tenemos lo siguiente:

$$t = t^n \Delta t \quad (4.68)$$

y la aproximación por diferencias finitas para la derivada del tiempo en la Ecuación (4.67) esta expresada como:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial t} \right|_{m,n} \approx \frac{T_{m,n}^{i^{n+1}} - T_{m,n}^{i^n}}{\Delta t} \quad (4.69)$$

El subíndice  $t^n$  es usado para denotar la dependencia del tiempo de  $T$ , y la derivada del tiempo es expresada en términos de la diferencia de temperaturas asociada con los tiempos *nuevos* ( $t^{n+1}$ ) y el *previo* ( $t^n$ ).

Por lo tanto, los cálculos deben ser realizados en tiempos sucesivos separados por el intervalo  $\Delta t$ , y justo como una solución por diferencias finitas restringe la determinación de la temperatura para un punto independiente en el espacio, esto también restringe a un punto independiente en el tiempo.

Si la Ecuación (4.69) es substituida dentro de la Ecuación (4.67), la naturaleza de la solución por diferencias finitas dependerá sobre el tiempo específico al cual las temperaturas son evaluadas para las derivadas espaciales. En la solución por el *método explícito*, estas temperaturas son evaluadas en un tiempo previo ( $t^n$ ). Por lo tanto, la Ecuación (4.69) es considerada como una aproximación de *diferencias hacia delante* para la derivada en el tiempo. Evaluando los términos sobre el lado derecho de la Ecuación (4.27) y (4.28) en  $p$  y substituyendo dentro de la Ecuación (4.67) la forma explícita de la ecuación por diferencias finitas para el nodo interior  $m$  y  $n$  es

$$\frac{1}{\alpha} \frac{T_{m,n}^{i^{n+1}} - T_{m,n}^{i^n}}{\Delta t} = \frac{T_{m+1,n}^n + T_{m-1,n}^n - 2T_{m,n}^n}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{m,n+1}^n + T_{m,n-1}^n - 2T_{m,n}^n}{(\Delta y)^2} \quad (4.70)$$

resolviendo para la temperatura nodal en el nuevo tiempo ( $t^{n+1}$ ) y asumiendo que  $\Delta x = \Delta y$ , esto nos da que

$$T_{m,n}^{i^{n+1}} = Fo \left( T_{m+1,n}^n + T_{m-1,n}^n + T_{m,n+1}^n + T_{m,n-1}^n \right) + (1 - 4Fo) T_{m,n}^n \quad (4.71)$$

donde  $Fo$  es una forma en diferencias finitas del numero de Fourier.

$$Fo = \frac{\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2} \quad (4.72)$$

si el sistema es de unidimensional en  $x$ , la forma explícita de las Ecuaciones por diferencias finitas para un nodo interior  $m$  se reduce a

$$T_m^{i^{n+1}} = Fo \left( T_{m+1}^n + T_{m-1}^n \right) + (1 - 2Fo) T_m^n \quad (4.73)$$

Las Ecuaciones (4.71) y (4.73) son *explícitas* por que las temperaturas nodales *desconocidas* para el nuevo tiempo son determinadas exclusivamente por las temperaturas nodales *conocidas* en el tiempo previo.

Sin embargo, la temperatura de cada nodo interior es conocida en  $t = 0$  ( $n = 0$ ) de condiciones iniciales preestablecidas, los cálculos empiezan en  $t = \Delta t$  ( $n = 1$ ), donde las Ecuaciones (4.71) o (4.73) son aplicadas en cada nodo interior para determinar su temperatura. Con temperaturas conocidas para  $t = \Delta t$ , la ecuación por diferencias finitas apropiada es entonces aplicada a cada nodo para determinar su temperatura en  $t = 2 \Delta t$  ( $n = 2$ ). De este modo, la distribución de temperatura es obtenida por un *marcado tiempo externo*, usando intervalos de  $\Delta t$ .

La precisión de la solución por diferencias finitas puede ser mejorada disminuyendo los valores de  $\Delta x$  y  $\Delta t$ . Por supuesto, el número de puntos nodales interiores deben tener un considerable incremento con el decremento de  $\Delta x$ , y el número de intervalos de tiempo requeridos para llevar la solución a un incremento del tiempo final preestablecido con una disminución de  $\Delta t$ . Por lo tanto, el tiempo de calculo se incrementa con la disminución de  $\Delta x$  y  $\Delta t$ . La elección de  $\Delta x$  está típicamente basada sobre un arreglo entre precisión y requerimientos computacionales. Una vez realizada esta selección, no obstante, el valor de  $\Delta t$  no puede ser elegido independientemente. Esto es, en cambio determinado por requerimientos de la *estabilidad*.

Una característica indeseable del método explícito es que este no es incondicionalmente *estable*. En un problema transitorio, la solución para las temperaturas nodales podría continuamente alcanzar un valor final (estado estable) incrementando el tiempo. Sin embargo con el método explícito, esta solución puede ser caracterizada por oscilaciones inducidas numéricamente, los valores son físicamente imposibles. Las oscilaciones pueden llegar a ser *inestables*, causando divergencia en la solución de las condiciones de estado estable actual. Para prevenir tales resultados erróneos, el valor preestablecido de  $\Delta t$  debe ser mantenido por debajo de un cierto limite, el cual depende de  $\Delta x$  y de otros parámetros del sistema.

Esta dependencia es calificada como el *criterio de estabilidad*, el cual puede ser obtenido matemáticamente. Para el problema de interés en esta tesis, *el criterio es determinado exigiendo que el coeficiente asociado con el nodo de interés en el tiempo previo es mas grande o igual a cero*. En general, esto es hecho recolectando todos los términos involucrados  $T_{m,n}^{i^n}$  para obtener la forma del coeficiente.

Este resultado es entonces usado para obtener una limitada relación involucrando  $F_o$ , del cual el máximo valor permisible de  $\Delta t$  puede ser determinado. Por ejemplo, con las Ecuaciones (4.71) y (4.73) expresadas ya en la forma deseada, esto sigue que el criterio de estabilidad para un nodo interior en una dimensión es  $(1 - 2F_o) \geq 0$  ó

$$F_o \leq \frac{1}{2} \quad (4.74)$$

y para un nodo de dos dimensiones, esto es  $(1 - 4F_o) \geq 0$  ó

$$F_o \leq \frac{1}{4} \quad (4.75)$$

Para los valores preestablecidos de  $\Delta x$  y  $\Delta y$ , ese criterio puede ser usado para determinar el valor del límite superior de  $\Delta t$ .

Las Ecuaciones (4.71) y (4.73) pueden también ser derivadas aplicando el método del balance de energía para un volumen de control sobre el interior del nodo. Contabilizando para los cambios en el almacenamiento de la energía, una forma general para el balance de la energía puede ser expresada como:

$$\dot{E}_{in} + \dot{E}_g = \dot{E}_{st} \quad (4.76)$$

En el interés de adoptar una metodología consistente, otra vez se asume que, todo el flujo de calor está *dentro* del nodo. Para ilustrar la aplicación de la Ecuación (4.64),



considerar la superficie nodal de un sistema de unidimensional mostrado en la Figura 4.8. Para más exactitud determine las condiciones térmicas cerca de las superficie, este nodo ha sido asignado a un espesor que es la mitad de ese nodo interior.

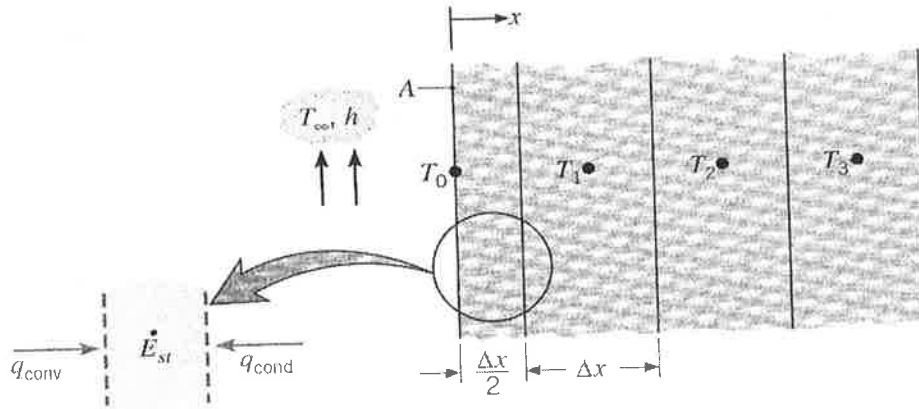


Figura 4.8 Superficie del nodo con convección y conducción transitoria en una dimensión

Asumiendo transferencia por convección de un fluido adyacente y sin generación de calor, se tiene que la Ecuación (4.76) puede describirse como:

$$hA(T_{\infty} - T_0^n) + \frac{kA}{\Delta x}(T_1^n - T_0^n) = \rho cA \frac{\Delta x}{2} \frac{T_0^{n+1} - T_0^n}{\Delta t} \quad (4.77)$$

ó, resolviendo para una temperatura de superficie en  $t + \Delta t$ ,

$$T_0^{n+1} = \frac{2h \Delta t}{\rho c \Delta x}(T_{\infty} - T_0^n) + \frac{2\alpha \Delta t}{\Delta x^2}(T_1^n - T_0^n) + T_0^n \quad (4.78)$$

Reconociendo que  $(2h \Delta t / \rho c \Delta x) = 2(h \Delta x / k)(\alpha \Delta t / \Delta x^2) = 2 Bi Fo$  y agrupando términos semejantes, tenemos que:

$$T_0^{n+1} = 2 Fo (T_1^n + Bi T_{\infty}) + (1 - 2 Fo - 2 Bi Fo) T_0^n \quad (4.79)$$

La forma del numero de Biot por diferencias finitas es

$$Bi = \frac{h\Delta x}{k} \quad (4.80)$$

Recordando el procedimiento para determinar el criterio de estabilidad, el cual requiere que el coeficiente para  $T_0''$  sea mas grande o igual a cero.

Por lo tanto

$$1 - 2 Fo - 2 Bi Fo \geq 0$$

ó

$$Fo (1 + Bi) \leq \frac{1}{2} \quad (4.81)$$

La Ecuación (4.81) debe ser contrastada con la Ecuación (4.74) para determinar cual requerimiento es mas estricto.

#### 4.5.3. Discretización de la Ecuación de Calor por el Método Implícito

En el esquema *explicito* de diferencias finitas, la temperatura de algún nodo en  $t + \Delta t$  puede ser calculado al conocer la temperatura en el mismo y nodos vecinos para un tiempo *previo*  $t$ . Así pues la determinación de una temperatura nodal en algún tiempo es *independiente* de las temperaturas en otros nodos para el *mismo tiempo*.

Aunque el método ofrece conveniencia computacional, éste sufre de limitaciones en la selección de  $\Delta t$ . Para un incremento de espacio dado, el intervalo de tiempo debe ser compatible con los requerimientos de estabilidad. Frecuentemente esto dicta el uso de valores extremadamente pequeños para  $\Delta t$  y un número largo de intervalos de tiempo pueden ser necesarios para obtener una solución. Una reducción en la cantidad del

tiempo de computación puede a menudo ser realizada empleando un esquema *implícito* en diferencias finitas antes que el esquema explícito.

La forma implícita de una ecuación de diferencias finitas puede ser derivada usando la Ecuación (4.69) para aproximar la derivada del tiempo, mientras evaluamos todas las otras temperaturas en el *nuevo* tiempo ( $t^{n+1}$ ), en lugar del tiempo previo ( $t$ ). La Ecuación (4.69) es entonces considerada para proporcionar una aproximación de *diferencias hacia atrás* para la derivada del tiempo. En contraste a la Ecuación (4.68) la forma implícita de la ecuación por diferencias finitas para el nodo anterior de un sistema en dos dimensiones es:

$$\frac{1}{\alpha} \frac{T_{m,n}^{i^{n+1}} - T_{m,n}^{i^n}}{\Delta t} = \frac{T_{m+1,n}^{i^{n+1}} + T_{m-1,n}^{i^{n+1}} - 2T_{m,n}^{i^{n+1}}}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{m,n+1}^{i^{n+1}} + T_{m,n-1}^{i^{n+1}} - 2T_{m,n}^{i^{n+1}}}{(\Delta y)^2} \quad (4.82)$$

Reagrupando y asumiendo  $\Delta x = \Delta y$ , esto nos da que

$$(1 + 4Fo) T_{m,n}^{i^{n+1}} - Fo(T_{m+1,n}^{i^{n+1}} + T_{m-1,n}^{i^{n+1}} + T_{m,n+1}^{i^{n+1}} + T_{m,n-1}^{i^{n+1}}) = T_{m,n}^{i^n} \quad (4.83)$$

De la Ecuación (4.83) es evidente que la *nueva* temperatura del nodo  $m, n$  depende de la *nueva* temperatura de sus nodos adyacentes, los cuales son, en general, desconocidos.

Por lo tanto, para determinar las temperaturas nodales desconocidas  $t + \Delta t$ , la ecuación nodal correspondiente debe ser *resuelta simultáneamente*. Tal solución debe ser resuelta usando la iteración de Gauss-Seidel o el método de la inversión de una matriz. El *avance de la solución* puede entonces involucrar la solución de ecuaciones nodales simultáneamente en cada tiempo  $t = \Delta t, 2\Delta t, \dots$ , hasta que el tiempo final deseado fue alcanzado. Con relación al método explícito, la formulación implícita tiene la importante ventaja de ser *incondicionalmente estable*. Es decir, la solución continúa estable para todos los intervalos de espacio y tiempo, en cuyo caso no hay restricción sobre  $\Delta x$  y  $\Delta t$ . Desde que valores mas grandes de  $\Delta t$  pueden ser usados con un método implícito, los tiempos de computación a menudo se reducen, con una pequeña pérdida de precisión. Sin embargo, para maximizar la precisión,  $\Delta t$  puede ser lo

suficientemente pequeña para asegurar que los resultados son independientes de una gran reducción en este valor.

La forma implícita de la ecuación por diferencias finitas puede también ser derivada del método del balance de energía. Para el nodo de la superficie de la Figura 4.8 éste muestra realmente que:

$$(1 + 2Fo + 2FoBi) T_0^{i^{n+1}} - 2Fo T_1^{i^{n+1}} = 2FoBiT_\infty + T_0^{i^n} \quad (4.84)$$

Para algún nodo interior ver la Figura 4.8, también puede ser mostrado que:

$$(1 + 2Fo) T_m^{i^{n+1}} - Fo(T_{m-1}^{i^{n+1}} + T_{m+1}^{i^{n+1}}) = T_m^{i^n} \quad (4.85)$$

Cada ecuación puede ser derivada aplicando el método del balance de energía.

#### 4.5.4 Formulación Lagrangiana-Euleriana (ALE)

Varios sistemas de coordenadas pueden ser usados para describir el estado de movimiento de un sólido, bajo ciertas condiciones en una dimensión. Esas descripciones son:

1. Lagrangiano, en el cual las variables de estado están en función de las coordenadas del material  $X$
2. Euleriano, en el cual las variables de estado están en función de las coordenadas de la corriente  $x$ .
3. Referencial, en el cual las variables de estado están en función de las coordenadas de referencia  $X$

En este documento, las variables dependientes pueden ser relacionadas a los parámetros físicos y a los no físicos. En la anterior categoría la variables son usualmente propiedades extensivas del material expresadas en unidades de masa, por ejemplo: la entalpía específica. Los parámetros no físicos como por ejemplo el volumen de control, la malla y los nodos están comúnmente relacionados a las variables intensivas, tales como la temperatura.

La Formulación desarrollada aquí puede ser considerada como una formulación ALE [118]. La formulación ALE permite el movimiento del Volumen de Control independiente. El Sistema de Referencia Computacional (SRC), El Sistema de Referencia del Material (SRM), y el Sistema de Coordenadas Espacial (SCE) son denotados por  $X$ ,  $x$  y  $X$  respectivamente [119]. La derivada del material  $D/Dt = \partial/\partial t|_x$  y la derivada ALE  $D^*/D^*t = \partial/\partial t|_x$  son derivadas espaciales relacionadas por las siguientes expresiones:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \Big|_x + \underline{v} \cdot \nabla \quad (4.86a)$$

$$\frac{D^*}{D^*t} = \frac{\partial}{\partial t} \Big|_x + \underline{v}^* \cdot \nabla = \frac{D}{Dt} + (\underline{v}^* - \underline{v}) \cdot \nabla \quad (4.86b)$$

donde  $\underline{v} = Dx/Dt$  y  $\underline{v}^* = D^*x/D^*t$ .

En la teoría que sigue,  $\Omega$  está definido por el difeo-morfismo  $x = (X, t)$ , el cual es obtenido por la solución de la ecuación diferencial  $\partial x / \partial t (X, t) = \underline{v}^*$ , donde  $\underline{v}^*$  es un campo de velocidad regular especificada. Para un análisis en el cual no existen discontinuidades las ecuaciones de la conservación de la masa, la energía y del momento requieren que:

$$\frac{D^*}{D^* t} \int_{\Omega} \rho dV + \int_{\Gamma} \rho (\underline{v} - \underline{v}^*) \cdot \underline{n} d\Gamma = 0 \quad (4.87a)$$

$$\frac{D^*}{D^* t} \int_{\Omega} \rho h dV + \int_{\Gamma} \rho h (\underline{v} - \underline{v}^*) \cdot \underline{n} d\Gamma = - \int_{\Gamma} q \cdot \underline{n} d\Gamma \quad (4.87b)$$

$$\frac{D^*}{D^* t} \int_{\Omega} \rho \underline{v} dV + \int_{\Gamma} \rho \underline{v} (\underline{v} - \underline{v}^*) \cdot \underline{n} d\Gamma = \int_{\Gamma} \underline{\sigma} \cdot \underline{n} d\Gamma + \int_{\Omega} \rho \underline{b} dV \quad (4.87c)$$

Luego aplicando el teorema del transporte de Reynolds junto con el teorema de la divergencia a las Ecuaciones (4.87a) a la (4.87c) lo que resultan las siguientes Ecuaciones:

$$\int_{\Omega} \frac{D^* \rho}{D^* t} dV + \int_{\Omega} \rho \operatorname{div} \underline{v}^* dV + \int_{\Omega} \operatorname{div} [\rho (\underline{v} - \underline{v}^*)] dV = 0 \quad (4.88a)$$

$$\int_{\Omega} \frac{D^* \rho h}{D^* t} dV + \int_{\Omega} \rho h \operatorname{div} \underline{v}^* dV + \int_{\Omega} \operatorname{div} [\rho h (\underline{v} - \underline{v}^*)] dV = \int_{\Omega} \operatorname{div} (k \nabla T) dV \quad (4.88b)$$

$$\int_{\Omega} \frac{D^* \rho \underline{v}}{D^* t} dV + \int_{\Omega} \rho \underline{v} \operatorname{div} \underline{v}^* dV + \int_{\Omega} \operatorname{div} [\rho \underline{v} (\underline{v} - \underline{v}^*)] dV = \int_{\Omega} (-\nabla p + \operatorname{div} (\underline{\sigma}') + \rho \underline{b}) dV \quad (4.88c)$$

Luego como tenemos que el  $\Omega$  es arbitrario, por lo que después de hacer algunas manipulaciones algebraicas en las Ecuaciones (4.88a) a la (4.88c) se obtiene:

$$\frac{D^* \rho}{D^* t} + \rho \operatorname{div} \underline{v}^* + \operatorname{div}[\rho(\underline{v} - \underline{v}^*)] = 0 \quad (4.89a)$$

$$\rho \frac{D^* h}{D^* t} + \rho(\underline{v} - \underline{v}^*) \cdot \nabla h = \operatorname{div}(k \nabla T) \quad (4.89b)$$

$$\rho \frac{D^* \underline{v}}{D^* t} + \rho(\underline{v} - \underline{v}^*) \cdot \nabla \underline{v} = -\nabla p + \operatorname{div}(\underline{\sigma}) + \rho \underline{b} \quad (4.89c)$$

Las ecuaciones anteriores son formas generales de las ecuaciones de continuidad, energía y momento.

Notar que si  $\underline{v}^* = \underline{v}$  entonces las Ecuaciones (4.89a) a la (4.89c) se transforman en un marco *Lagrangiano* (en el cual la velocidad es respecto a la velocidad del material). Por lo cual al sustituir lo anterior podemos obtener las siguientes formas:

Forma Lagrangiana de la ecuación de continuidad

$$\frac{D \rho}{D t} + \rho \operatorname{div} \underline{v} = 0 \quad (4.90a)$$

Forma Lagrangiana de la Ecuación de energía

$$\rho \frac{D h}{D t} = \operatorname{div}(k \nabla T) \quad (4.90b)$$

Forma Lagrangiana de la Ecuación de momento

$$\rho \frac{D \underline{v}}{D t} = -\nabla p + \operatorname{div}(\underline{\sigma}) + \rho \underline{b} \quad (4.90c)$$

Similarmente si  $\underline{v}^* = 0$ , entonces las Ecuaciones (4.89a) a la (4.89c) se transforman en un marco Euleriano (en el cual la velocidad del material es cero). Por lo cual al sustituir lo anterior podemos obtener las siguientes formas:

Forma Euleriana de la ecuación de continuidad

$$\rho \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \underline{v}) = 0 \quad (4.91a)$$

Forma Euleriana de la Ecuación de energía

$$\rho \frac{\partial h}{\partial t} + \rho \underline{v} \cdot \nabla h = \text{div}(k \nabla T) \quad (4.91b)$$

Forma Euleriana de la Ecuación de momento

$$\rho \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \rho \underline{v} \cdot \nabla \underline{v} = -\nabla p + \text{div}(\underline{\sigma}) + \rho \underline{b} \quad (4.91c)$$

En cambio para un análisis en el cual las discontinuidades están presentes, uno de los aspectos importantes usando la derivada  $D^*/D^*t$  es que cuando se aplica a la solidificación el término  $D^*(\int_{\Omega_l} \rho h dV)/D^*t$  y  $D^*(\int_{\Omega_s} \rho h dV)/D^*t$  son significativos.

En adición, por que  $\rho$ ,  $h$  y  $\underline{v}$  son diferenciables sobre  $\Omega_l$  y  $\Omega_s$ , las Ecuaciones (4.87a) a la (4.87c) pueden ser legítimamente transformadas en las Ecuaciones (4.89a) a la (4.89c) para cada dominio. Notar que sobre  $\Gamma_i$ , es necesario hacer el arreglo  $\underline{v}^* = \underline{v}_i$ , donde  $\underline{v}_i$  es igual a la velocidad de  $\Gamma_i$ . En éste caso, tenemos discontinuidades presentes sobre la interfase ( $\Gamma_i$ ) sólida y líquida, entonces a las Ecuaciones (4.87a) a la (4.87c) se les agrega el término de ésta interfase, lo que nos da para la parte líquida y para la parte sólida lo siguiente:



Para la parte Líquida tenemos:

$$\frac{D^*}{D^* t} \int_{\Omega_l} \rho dV + \int_{\Gamma_l} \rho (\underline{v} - \underline{v}^*) \cdot \underline{n} d\Gamma - \int_{\Gamma'_l} \rho (\underline{v} - \underline{v}_l) \cdot \underline{n}_s d\Gamma = 0 \quad (4.92a)$$

$$\begin{aligned} & \frac{D^*}{D^* t} \int_{\Omega_l} \rho h dV + \int_{\Gamma_l} \rho h (\underline{v} - \underline{v}^*) \cdot \underline{n} d\Gamma - \int_{\Gamma'_l} \rho h (\underline{v} - \underline{v}_l) \cdot \underline{n}_s d\Gamma \\ &= \int_{\Gamma_l} \underline{q} \cdot \underline{n} d\Gamma + \int_{\Gamma'_l} \underline{q} \cdot \underline{n}_s d\Gamma \end{aligned} \quad (4.92b)$$

$$\begin{aligned} & \frac{D^*}{D^* t} \int_{\Omega_l} \rho \underline{v} dV + \int_{\Gamma_l} \rho \underline{v} (\underline{v} - \underline{v}^*) \cdot \underline{n} d\Gamma - \int_{\Gamma'_l} \rho \underline{v} (\underline{v} - \underline{v}_l) \cdot \underline{n}_s d\Gamma \\ &= \int_{\Gamma_l} \underline{\sigma} \cdot \underline{n} d\Gamma - \int_{\Gamma'_l} \underline{\sigma} \cdot \underline{n}_s d\Gamma + \int_{\Omega_l} \rho \underline{b} dV \end{aligned} \quad (4.92c)$$

Ahora para la parte Sólida tenemos:

$$\frac{D^*}{D^* t} \int_{\Omega_s} \rho dV + \int_{\Gamma_s} \rho (\underline{v} - \underline{v}^*) \cdot \underline{n} d\Gamma - \int_{\Gamma^s_l} \rho (\underline{v} - \underline{v}_l) \cdot \underline{n}_s d\Gamma = 0 \quad (4.93a)$$

$$\begin{aligned} & \frac{D^*}{D^* t} \int_{\Omega_s} \rho h dV + \int_{\Gamma_s} \rho h (\underline{v} - \underline{v}^*) \cdot \underline{n} d\Gamma - \int_{\Gamma^s_l} \rho h (\underline{v} - \underline{v}_l) \cdot \underline{n}_s d\Gamma \\ &= \int_{\Gamma_s} \underline{q} \cdot \underline{n} d\Gamma + \int_{\Gamma^s_l} \underline{q} \cdot \underline{n}_s d\Gamma \end{aligned} \quad (4.93b)$$

$$\begin{aligned} & \frac{D^*}{D^* t} \int_{\Omega_s} \rho \underline{v} dV + \int_{\Gamma_s} \rho \underline{v} (\underline{v} - \underline{v}^*) \cdot \underline{n} d\Gamma - \int_{\Gamma^s_l} \rho \underline{v} (\underline{v} - \underline{v}_l) \cdot \underline{n}_s d\Gamma \\ &= \int_{\Gamma_s} \underline{\sigma} \cdot \underline{n} d\Gamma - \int_{\Gamma^s_l} \underline{\sigma} \cdot \underline{n}_s d\Gamma + \int_{\Omega_s} \rho \underline{b} dV \end{aligned} \quad (4.93c)$$

Donde  $\Gamma_i = \Gamma_i^l = \Gamma_i^s$  y  $\mathbf{n}_s$  es un punto exterior normal para  $\Omega_s$  sobre  $\Gamma_i$ . Además, para un pequeño volumen arbitrario dentro de  $\Gamma_i$  y moviéndose a una velocidad  $\mathbf{v}_i$  las Ecuaciones (4.87a) a la (4.87c) se transforman en:

$$-\int_{\Gamma_i^l} \rho(\mathbf{v} - \mathbf{v}_i) \cdot \mathbf{n}_s d\Gamma + \int_{\Gamma_i^s} \rho(\mathbf{v} - \mathbf{v}_i) \cdot \mathbf{n}_s d\Gamma = 0 \quad (4.94a)$$

$$-\int_{\Gamma_i^l} \rho h(\mathbf{v} - \mathbf{v}_i) \cdot \mathbf{n}_s d\Gamma + \int_{\Gamma_i^s} \rho h(\mathbf{v} - \mathbf{v}_i) \cdot \mathbf{n}_s d\Gamma = \int_{\Gamma_i^l} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}_s d\Gamma - \int_{\Gamma_i^s} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}_s d\Gamma \quad (4.94b)$$

$$\begin{aligned} & -\int_{\Gamma_i^l} \rho \mathbf{v}(\mathbf{v} - \mathbf{v}_i) \cdot \mathbf{n}_s d\Gamma + \int_{\Gamma_i^s} \rho \mathbf{v}(\mathbf{v} - \mathbf{v}_i) \cdot \mathbf{n}_s d\Gamma \\ & = -\int_{\Gamma_i^l} \underline{\sigma} \cdot \mathbf{n}_s d\Gamma + \int_{\Gamma_i^s} \underline{\sigma} \cdot \mathbf{n}_s d\Gamma \end{aligned} \quad (4.94c)$$

Las cuales proporcionan las condiciones de salto siguiente  $[\rho(\mathbf{v} - \mathbf{v}_i) \cdot \mathbf{n}_s] = 0$ ,  $-\rho h(\mathbf{v} - \mathbf{v}_i) \cdot \mathbf{n}_s = [\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}_s]$ ,  $[\rho \mathbf{v}(\mathbf{v} - \mathbf{v}_i) \cdot \mathbf{n}_s] = [\underline{\sigma} \cdot \mathbf{n}_s]$ .

Donde los paréntesis cuadrados denotan la diferencia en  $\Gamma_i$ .

Notar que, para  $\rho_l \neq \rho_s$ , la condición  $[\rho(\mathbf{v} - \mathbf{v}_i) \cdot \mathbf{n}_s] = 0$ , confirma que  $\mathbf{v}_l \neq \mathbf{v}_s$  sobre  $\Gamma_i$ , y  $[\underline{\sigma} \cdot \mathbf{n}_s] = \rho_s(\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_l) \cdot \mathbf{n}_s [\mathbf{v}]$  refleja la discontinuidad en  $\underline{\sigma}$ .

En la práctica, para materiales metálicos, la discontinuidad en  $\underline{\sigma}$  y  $\mathbf{v}$  pueden ser razonablemente ignorados pero su aproximación no es apropiada para  $h$ . En este caso,  $[\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}_s] = -\rho(\mathbf{v} - \mathbf{v}_i) \cdot \mathbf{n}_s [h] = -\rho(\mathbf{v} - \mathbf{v}_i) \cdot \mathbf{n}_s l$ , donde  $l$  es el calor latente por unidad de masa. Además los procesos de formado del metal son generalmente considerados casi estáticos. Esta combinación con la suposición de que la densidad es casi invariante se obtiene que:

$$\text{div } \mathbf{v} = 0 \quad (4.95a)$$

$$\rho \frac{D^* h}{D^* t} + \rho (\underline{v} - \underline{v}^*) \cdot \nabla h = \text{div} (k \nabla T) \quad (4.95b)$$

$$-\nabla p + \text{div}(\underline{\sigma}') = 0 \quad (4.95c)$$

Donde las fuerzas del cuerpo se asumen como cero. En la práctica, las Ecuaciones (4.95a) a la (4.95c) son requeridas para resolverse en conjunto con las condiciones de salto, como estas no están definidas en  $\Gamma_i$ . Por lo que la integración de la Ecuación (4.87b) nos da:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_*^{n+1}} \rho^{n+1} h^{n+1} dV - \int_{\Omega^n} \rho^n h^n dV + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\Gamma(t)} \rho h (\underline{v} - \underline{v}^*) \cdot \underline{n} d\Gamma dt \\ &= - \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\Gamma(t)} q \cdot \underline{n} d\Gamma dt \end{aligned} \quad (4.96)$$

donde  $\Omega_*^{n+1}$  es el dominio generado bajo el mapeado  $x(\Omega^n, t_{n+1})$ , donde  $x(X, t_{n+1}) = x(X, t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \underline{v}^*(X, t) dt$  y  $X \in \Omega^n$ .

La elección de  $\underline{v}^*$  es una consideración importante para la Ecuación (4.96). Tomando el arreglo  $\underline{v}^* = 0$  proporciona que  $\Omega_*^{n+1} = \Omega^n$  y

$$\int_{\Omega^n} \rho^{n+1} h^{n+1} dV - \int_{\Omega^n} \rho^n h^n dV + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\Gamma(t)} \rho h \underline{v} \cdot \underline{n} d\Gamma dt = - \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\Gamma^n} q \cdot \underline{n} d\Gamma dt \quad (4.97)$$

La cual involucra una frontera integral compleja aunque otras integrales son simplificadas. El arreglo  $\underline{v}^* = \underline{v}$  resulta en la eliminación de la frontera integral para dar lo siguiente:

$$\int_{\Omega^{n+1}} \rho^{n+1} h^{n+1} dV - \int_{\Omega^n} \rho^n h^n dV = - \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\Gamma(t)} q \cdot \underline{n} d\Gamma dt \quad (4.98)$$

## 4.6 Discretización del MCVC

La Ecuación (4.89b) ha probado por ella misma dificultad para ser resuelta usando el FEM, incluso sin solidificación presente [20]. Esta sección es concerniente con una Ecuación Diferencial Parcial Alternativa (EDPA) que pueda ser mas rápidamente resuelta usando técnicas numéricas. La ecuación EDPA es construida de modo que su solución (campo de temperatura) sea precisamente la que satisface a las Ecuaciones (4.87b) y (4.89b). Considerar la definición de una capacitancia de volumen de control  $c^*$  [28] vía la identidad:

$$\begin{aligned} \frac{D^*}{D^* t} \int_{\Omega} c^* T dV - \int_{\Gamma} c^* T (\underline{v}^* \cdot \underline{n}) d\Gamma &= \frac{D^*}{D^* t} \int_{\Omega} \rho h dV + \int_{\Gamma} \rho h (\underline{v} - \underline{v}^*) \cdot \underline{n} d\Gamma \\ &= \int_{\Gamma} q \cdot \underline{n} d\Gamma \end{aligned} \quad (4.99)$$

donde el término de flujo  $c^* T (\underline{v}^* \cdot \underline{n})$  esta incluido para asegurar que  $c^*$  no depende de  $\underline{v}^*$ .

Sin embargo,  $c^*$  es dependiente de  $v$  y en la ausencia de discontinuidades, la Ecuación (4.99) puede ser transformada después de realizar algunas manipulaciones en:

$$\frac{D^* (c^* T)}{D^* t} - \underline{v}^* \cdot \nabla (c^* T) = \rho \frac{D^* h}{D^* t} + \rho (\underline{v} - \underline{v}^*) \cdot \nabla h = \text{div}(k \nabla T) \quad (4.100)$$

la cual se puede reducir aun más a la siguiente Ecuación:

$$\frac{\partial^* (c^* T)}{\partial^* t} = \rho \frac{\partial^* h}{\partial^* t} + \rho (\underline{v}) \cdot \nabla h = \text{div}(k \nabla T) \quad (4.101)$$

la cual está dentro del marco de referencia Euleriano.

Esta ecuación puede ser integrada para dar una definición explícita para  $c^*$  en un punto espacial  $x$  y en un tiempo  $t$ , por lo que después de algunas manipulaciones numéricas obtenemos la siguiente Ecuación:

$$c^*(x, t) = c^*(x, t_0) \frac{T(x, t_0)}{T(x, t)} + \frac{1}{T(x, t)} \int_0^t \left( \rho \frac{\partial h}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla h \right) (x, \tau) d\tau \quad (4.102)$$

donde es aparente que aunque  $c^*$  no es única, está bien definida la condición de que  $T(x, t) \neq 0$ , la cual puede ser siempre necesaria.

Si una discontinuidad está presente en el dominio  $\Omega$  en forma de una interfase  $\Gamma_i$  entre  $\Omega_i$  y  $\Omega_s$ , entonces la Ecuación (4.99) puede ser usada. Para un volumen pequeño arbitrario encerrado en  $\Gamma_i$  moviéndose a una velocidad  $v_i$  la ecuación (4.99) dará:

$$\int_{\Gamma_i^l} c^* T(\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_s) d\Gamma - \int_{\Gamma_i^s} c^* T(\mathbf{v}_i^* \cdot \mathbf{n}_s) d\Gamma = \int_{\Gamma_i^l} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}_s d\Gamma - \int_{\Gamma_i^s} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}_s d\Gamma \quad (4.103)$$

la cual dio una condición de salto  $T_{sol}(\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_s)[c^*] = -[\rho h(\mathbf{v} - \mathbf{v}_i) \cdot \mathbf{n}_s] = [\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}_s]$ , donde  $T_{sol}$  es la temperatura de solidificación. Esto confirma que  $c^*$  es discontinua en  $\Gamma_i$ . La ecuación (4.96) en forma integral es:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega^{n+1}} c^{*n+1} T^{n+1} dV - \int_{\Omega^n} c^{*n} T^n dV - \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\Gamma(t)} c^* T(\mathbf{v}^* \cdot \mathbf{n}) d\Gamma dt \\ &= \int_{\Omega^{n+1}} \rho^{n+1} h^{n+1} dV - \int_{\Omega^n} \rho^n h^n dV + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\Gamma(t)} \rho h(\mathbf{v} - \mathbf{v}^*) \cdot \mathbf{n} d\Gamma dt \\ &= - \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\Gamma(t)} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} d\Gamma dt \end{aligned} \quad (4.104)$$

El interés principal de este documento es la forma Euleriana por lo que el termino de la doble integral del lado izquierdo se elimina y lo que resulta es la siguiente ecuación:

$$\int_{\Omega^n} c^{n+1} T^{n+1} dV - \int_{\Omega^n} c^n T^n dV = \int_{\Omega^n} \rho^{n+1} h^{n+1} dV - \int_{\Omega^n} \rho^n h^n dV$$

$$+ \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\Gamma(t)} \rho h \underline{v} \cdot \underline{n} d\Gamma dt = - \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\Gamma^n} q \cdot \underline{n} d\Gamma dt \quad (4.105)$$

ésta es la forma que facilitaría el cálculo de  $c^{*n+1}$  con relativa facilidad.

Por otro lado podemos decir que las ecuaciones de elemento finito gobernantes para la transferencia de calor requieren ser consistentes con la Ecuación (4.87b) para asegurar que el tratamiento de la discontinuidad de  $h$  es correcto. Una aproximación para la derivación de las ecuaciones por EF es integrar un producto de la ecuación diferencial parcial gobernante  $D(T) = \rho D^* h / D^* t + \rho (\underline{v} - \underline{v}^*) \cdot \nabla h - \text{div}(k \nabla T) = 0$  y una función de sobre peso  $W$  arbitraria sobre  $\Omega$ .

Esto nos dará la Ecuación  $\int_{\Omega} W D(\bar{T}) dV = 0$ , donde  $\bar{T} \approx T$  y los residuos ponderados arbitrarios de  $W$  proveerán los valores para la función  $D(\bar{T}) \approx 0$ . La dificultad aquí es que  $D(T)$  no está definido sobre  $\Gamma_i$ , y una condición de salto es requerida para capturar al calor latente que es liberado. Esto parece requerir la necesidad de considerar el dominio  $\Omega_l$  y  $\Omega_s$  separadamente.

Para evitar esto, la ecuación diferencial gobernante es reemplazada de tal modo que  $\bar{D}(T) = D(T)$  donde para éste este caso tenemos que :

$$\bar{D}(T) = \frac{D^*(c^*T)}{D^*t} - \underline{v}^* \cdot \nabla(c^*T) - \text{div}(k \nabla T) = 0 \quad (4.106)$$

donde  $c^*$  está definida como se mencionó algunos renglones arriba, para asegurar que el calor latente es correctamente calculado. Es reconocido por supuesto, que  $\bar{D}(T)$  no está definido por si mismo sobre  $\Gamma_i$ . Sin embargo, ésta forma es tal que puede ser integrada más rápidamente. Un proceso de discretización por Elementos Finitos estándar aplicado a  $\bar{D}(T) = 0$ , dará el siguiente sistema:

$$\int_{\Omega_e} N_j \left( \frac{D^*(c^*T)}{D^*t} - \underline{v}^* \cdot \nabla(c^*T) \right) dV + \sum_{i=1}^{m_e} \left[ T_i \int_{\Omega_e} k \nabla N_j \cdot \nabla N_i dV \right]$$

$$= - \int_{\Gamma_e} N_j q \cdot \underline{n} dA \quad (4.107)$$

donde  $j = 1, 2, \dots, m_e$ , y donde  $m_e$  es el numero de nodos de los elementos.

La sumatoria de esta ecuación con respecto a  $j$  proporciona la siguiente ecuación:

$$\int_{\Omega_e} \sum_{j=1}^{m_e} N_j \left( \frac{D^*(c^*T)}{D^*t} - \underline{v}^* \cdot \nabla(c^*T) \right) dV + \sum_{i=1}^{m_e} \left[ T_i \int_{\Omega_e} k \nabla \left( \sum_{j=1}^{m_e} N_j \right) \cdot \nabla N_i dV \right]$$

$$= - \int_{\Gamma_e} \sum_{j=1}^{m_e} N_j q \cdot \underline{n} dA \quad (4.108)$$

la cual después de haberla evaluado con respecto a  $j$  se reduce a la siguiente ecuación

$$\int_{\Omega_e} (D^*(c^*T)/D^*t - \underline{v}^* \cdot \nabla(c^*T)) dV = - \int_{\Gamma_e} q \cdot \underline{n} dA. \text{ A su vez esta transformación en}$$

$$D^* \left( \int_{\Omega_e} c^*T dV \right) / D^*t - \int_{\Gamma_e} c^*T (\underline{v}^* \cdot \underline{n}) dA = - \int_{\Gamma_e} q \cdot \underline{n} dA, \text{ la cual es la Ecuación (4.99)}$$

pero aplicada al dominio del elemento  $\Omega_e$ .

Sobre el arreglo  $\underline{v}^* = 0$ , la Ecuación (4.105) puede ser obtenida también para  $\Omega_e$ . Es hora de hacer una razonable selección de la aproximación para  $c^*$  sobre el  $\Omega_e$  y  $[t_n, t_{n+1}]$ . La mas sencilla aproximación a un arreglo de  $c^*$  es para una  $c_e^*$  constante lo cual se obtiene que:

$$c_e^* \int_{\Omega_e^n} (T^{n+1} - T^n) dV = \int_{\Omega_e^n} \rho^{n+1} h^{n+1} dV - \int_{\Omega_e^n} \rho^n h^n dV + \int_n^{t_{n+1}} \int_{\Gamma_e^n} \rho h \underline{v} \cdot \underline{n} dA$$

$$= - \int_{I_n}^{I_{n+1}} \int_{\Gamma_e} q \cdot n dA \quad (4.109)$$

posteriormente si se despeja a  $c_e^*$  se obtiene la siguiente Ecuación:

$$c_e^* = \frac{\int_{\Omega_e^n} \rho^{n+1} h^{n+1} dV - \int_{\Omega_e^n} \rho^n h^n dV + \int_{I_n}^{I_{n+1}} \int_{\Gamma_e^n} \rho h v \cdot n dA}{\int_{\Omega_e^n} (T^{n+1} - T^n) dV} \quad (4.110)$$

luego de hacer algunas manipulaciones algebraicas determinamos que:

$$\int_{\Omega_e^n} \rho^{n+1} h^{n+1} dV - \int_{\Omega_e^n} \rho^n h^n dV = \Delta h \quad (4.111)$$

$$\int_{I_n}^{I_{n+1}} \int_{\Gamma_e^n} \rho h v \cdot n dA = \rho \bar{h} v_x \Delta t \quad (4.112)$$

$$\int_{\Omega_e^n} (T^{n+1} - T^n) dV = \Delta t * \Delta x \quad (4.113)$$

sustituyendo las Ecuaciones (4.111), (4.112) y (4.113) en la Ecuación (4.110) determinamos que la Capacitancia de Volumen de Control (CVC) puede ser determinada por la siguiente Expresión:

$$c_e^* = \frac{\Delta h + \rho \bar{h} v_x \Delta t}{\Delta t * \Delta x} \quad (4.114)$$



## 4.7 Solución Numérica

Necesitamos una suposición aproximada de cómo es que varían  $T_P$ ,  $T_E$ , y  $T_W$  con el tiempo. Algunas suposiciones son posibles, y algunas de ellas pueden ser generalizadas usando la aproximación siguiente:

$$T_P = \theta T_P^{n+1} + (1-\theta)T_P^n \quad (4.115)$$

Donde  $\theta$  es un factor de sobre-peso con un valor de entre 0 y 1. Particularmente, si  $\theta = 0$  da un esquema explícito, si  $\theta = 0.5$ , un esquema de Crank Nicholson, y si  $\theta = 1$ , obtenemos un esquema implícito. Formulas similares para  $T_E$  y  $T_W$  pueden ser usadas.

Sustituyendo la Ecuación (4.115) dentro de la Ecuación (4.34) y realizando algunas manipulaciones algebraicas obtenemos:

$$\begin{aligned} & \rho c_p \Delta x (T_P^1 - T_P^0) \\ & = k_p \Delta t \left( \theta \left[ \frac{T_E^{n+1} - T_P^{n+1}}{\delta x_e} - \frac{T_P^{n+1} - T_W^{n+1}}{\delta x_w} \right] + [1-\theta] \left[ \frac{T_E^n - T_P^n}{\delta x_e} - \frac{T_P^n - T_W^n}{\delta x_w} \right] \right) \end{aligned} \quad (4.116)$$

reagrupando términos de la Ecuación (4.116) obtenemos:

$$a_P^{n+1} T_P^{n+1} = a_E^{n+1} T_E^{n+1} + a_W^{n+1} T_W^{n+1} + a_E^n T_E^n + a_W^n T_W^n + a_P^n T_P^n \quad (4.117)$$

Donde  $a_P^{n+1} = a_E^{n+1} + a_W^{n+1} + a_E^n + a_W^n + a_P^n$ ,  $a_E^{n+1} = \theta \delta x_e^{-1}$ ,  $a_W^{n+1} = \theta \delta x_w^{-1}$ ,  $a_W^n = (1-\theta) \delta x_w^{-1}$   
y  $a_P^n = c_p \Delta x / k_p \Delta t - (1-\theta) \delta x_e^{-1} - (1-\theta) \delta x_w^{-1}$ .

El esquema implícito ( $\theta = 1$ ) satisface completamente nuestros requerimientos de simplicidad y comportamiento físico satisfactoriamente.

El procedimiento de solución numérica del método de capacitancia de volumen de control está dado en el diagrama de flujo de la Figura 4.9.

La solución numérica es similar a esa usada para la conducción de calor parabólico estándar. Para una buena revisión detallada de la metodología de solución el lector puede consultar las referencias [7, 9, 28, 39 y 43].

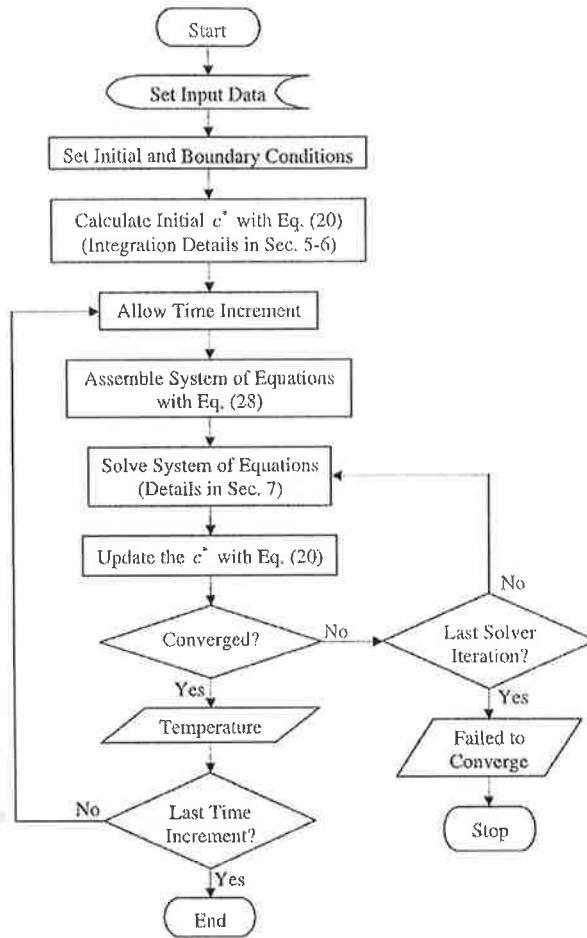


Figura 4.9 Diagrama de Flujo que muestra el procedimiento de solución.

# *Capítulo Cinco*

## **Método de Capacitancia de Volumen de Control Modificado (MCVC-M)**

---

### **5.1 Resumen**

En el MCVC la ecuación de gobierno es similar a la ecuación de transferencia de calor por conducción, donde el efecto de la convección está implícito en el término de “c”. La ecuación de flujo de calor por conducción es igualada con la ecuación del flujo de energía (entalpía) para derivar la Capacitancia del Volumen de Control, utilizando la definición de calor específico. Posteriormente las ecuaciones son discretizadas por el método de Galerkin. Las ecuaciones de elemento finito resultantes y sus soluciones son similares al caso de conducción pura. Con esta aproximación, el sistema ensamblado de las ecuaciones de elemento finito se mantienen simétricas. Éste método es llamado Método de Capacitancia de Volumen de Control (MCVC). El método nos da soluciones libres de oscilación cuando son aplicadas velocidades negativas, se presentan coeficientes singulares para velocidades positivas. Para eliminar ésta desventaja, las ecuaciones del MEF son algebraicamente reformuladas. Por lo que a este método se le denomina Método de Capacitancia de Volumen de Control Modificado (MCVC-M).

Para validar el MCVC-M es comparado con otros métodos numéricos y la solución analítica. Existe suficiente evidencia de que estas oscilaciones se deben a la manera en que las ecuaciones de gobierno son discretizadas y ordenadas en el sistema de ecuaciones algebraicas a resolver.

Denotemos un coeficiente arbitrario en la diagonal principal de un sistema de ecuaciones algebraicas de elemento finito con el símbolo  $p$ . Notemos que la mayoría de las formulaciones involucran términos de la forma  $p = a/(1-c)$  donde  $c$  está determinado por la densidad de malla, la velocidad y el intervalo del tiempo. La variación de estos parámetros puede resultar en  $c = 1$  lo que hace que el coeficiente  $p$  no esté definido. Esto hace que el sistema esté mal condicionado.

En este trabajo se reformularon las ecuaciones del MCVC para prevenir este tipo de problemas. Lo anterior deriva en que las soluciones obtenidas con éste método estén libres de problemas de inestabilidad. Esta aproximación se compara con la solución analítica cuyo desarrollo se puede tomar de las referencias [1 y 39]. También se compara al MCVC-M con algunas aproximaciones numéricas clásicas para dar mayor peso a su validación. Se incluyeron las siguientes pruebas numéricas:

1. Coeficientes del MVC-M Reformulados
2. Comparación entre los dos Métodos de la Capacitancia, el Convencional y el Modificado para diferentes velocidades.
3. Comparación entre los perfiles de temperatura entre los dos Métodos de la Capacitancia, el Convencional y el Modificado para diferentes velocidades.
4. Se realizó una prueba para conocer cual de los dos Métodos convergió dependiendo de la velocidad aplicada.
5. Se realizó una prueba para conocer y comparar cuanto tiempo en segundos se llevó cada uno de los Métodos en converger dependiendo de la velocidad aplicada.
6. Se realizó una prueba para conocer y comparar el número de iteraciones que se llevaron cada uno de los Métodos dependiendo de la velocidad aplicada.
7. Se realizó una prueba para conocer y comparar el error temperatura que se presenta en cada uno de los Métodos dependiendo de la velocidad aplicada.

## 5.2 Coeficientes del MCVC-M

Con el fin de evitar coeficientes singulares en el sistema de ecuaciones algebraicas el MCVC es reformulado. Por simplicidad utilizamos el caso unidimensional mostrado en la Figura 5.1. Los parámetros del material, la geometría, condiciones iniciales y de frontera están descritos en el punto 5.4. Para mostrar las ventajas de la aproximación propuesta en este trabajo, una discretización general se deriva usando los puntos de la malla mostrados en la Figura 2.1. El punto de malla  $P$  esta rodeado por los puntos  $E$  y  $W$  (al este y oeste respectivamente). Las líneas punteadas denotan las caras del volumen de control  $e$  y  $w$ ; para dar simplicidad se quitan los símbolos de integración.

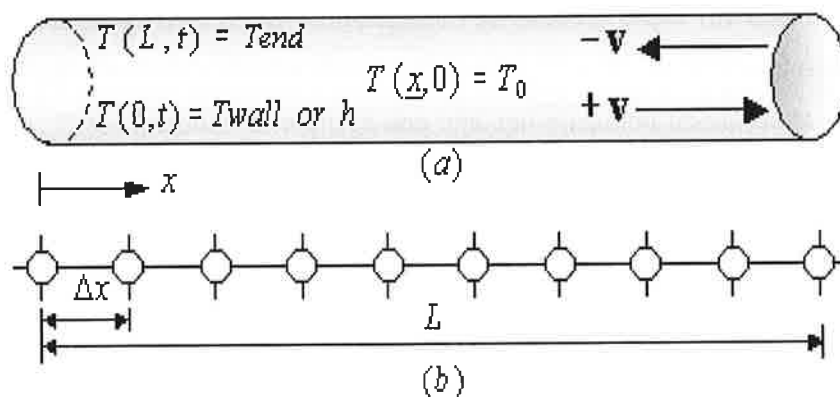


Figura 5.1 El problema unidimensional con el tipo de malla, empleando condiciones iniciales y de frontera para pruebas numéricas.

La evaluación de las derivadas de un perfil lineal de temperaturas en segmentos se muestra en la Figura 4.6, y reagrupando términos de la Ecuación (4.116) se obtuvo la Ecuación (4.117).

Ahora de la Ecuación (4.117) pueden derivarse varios métodos de solución escogiendo valores diferentes para los coeficientes de las temperaturas nodales.

Despreciando las fuerzas de cuerpo y los términos de producción de calor, los coeficientes para la formulación de diferencias centrales en la conducción de calor son:

$$a_E = \frac{k_e}{(\Delta x)_e}, a_W = \frac{k_w}{(\Delta x)_w}, a_p^n = \frac{\rho c \Delta x}{(\Delta t)} \quad \text{y} \quad a_p^{n+1} = a_E^{n+1} + a_W^{n+1} + a_p^n \quad (5.1)$$

Los coeficientes anteriores se derivan de la aproximación lineal, es decir la primera aproximación de Taylor. Cualquier método puede ser aplicado para resolver este sistema de ecuaciones. Los métodos directos (que no requieren iteraciones) para resolver el sistema de ecuaciones algebraicas en dos o tres dimensiones son mucho más complicados y requieren mucho espacio en memoria y tiempo.

Los problemas no lineales hacen el trabajo más difícil y consumen más recursos computacionales para la solución de este tipo de problemas. Por esta razón los métodos directos no se incluyen en éste trabajo. Sin embargo un trabajo relativo a los métodos directos y su programación en computadora se publicó en la referencia [120]. Una alternativa es el uso de métodos iterativos para la solución de sistemas de ecuaciones algebraicas. Estos métodos comienzan con una aproximación inicial de la solución. Se utilizó el método de Gauss-Seidel. Solo un grupo de variables dependientes es almacenado en la memoria de la computadora. Cuando cada nodo de la malla se ha evaluado, el valor correspondiente de la variable dependiente es calculada por la Ecuación:

$$a_p^{n+1} T_p^{n+1} = \sum a_{nb}^{n+1} T_{nb}^{n+1} \quad (5.2)$$

donde  $nb$  denota los nodos vecinos del nodo a analizar, luego  $T_p^{n+1}$  en cada punto de malla se calcula por la ecuación siguiente:

$$T_p^{n+1} = \frac{\sum a_{nb}^{n+1} T_{nb}^{*n+1}}{a_p^{n+1}} \quad (5.3)$$

donde  $T_p^{*n+1}$  es el valor anterior almacenado en la memoria en el nodo  $n$ .

Ese valor calculado se dice que es el valor presente de los valores que ya han sido calculados en la iteración. Para los valores de los puntos que serán calculados,  $T_p^{*n+1}$  es el valor calculado en la iteración anterior. El término  $T_p^{*n+1}$  siempre será el valor calculado recientemente para la variable dependiente del nodo "vecino". Cuando todos los nodos de la malla hayan sido considerados de esta manera, se ha completado una iteración del método de Gauss-Seidel.

La discretización convencional de Galerkin para el MCVV y con la introducción del parámetro  $\lambda = k \Delta t / \rho (\Delta x)^2$  se obtiene la siguiente Ecuación:

$$a_W^{n+1} = \frac{\lambda}{c}, \quad a_E^{n+1} = \frac{\lambda}{c} \quad \text{y} \quad a_P^n = 1 + \frac{2\lambda}{c}, \quad (5.4)$$

Se hace notar que un valor de cero para la capacitancia puede hacer algunas regiones discontinuas en el dominio, presentando como resultado oscilaciones. El comportamiento de la diagonal principal se presenta en la Figura 5.2, cuando se emplean números de Peclet negativos (velocidades negativas). Se observa que el incremento de la capacitancia en la Ecuación (5.4) no genera problemas numéricos.

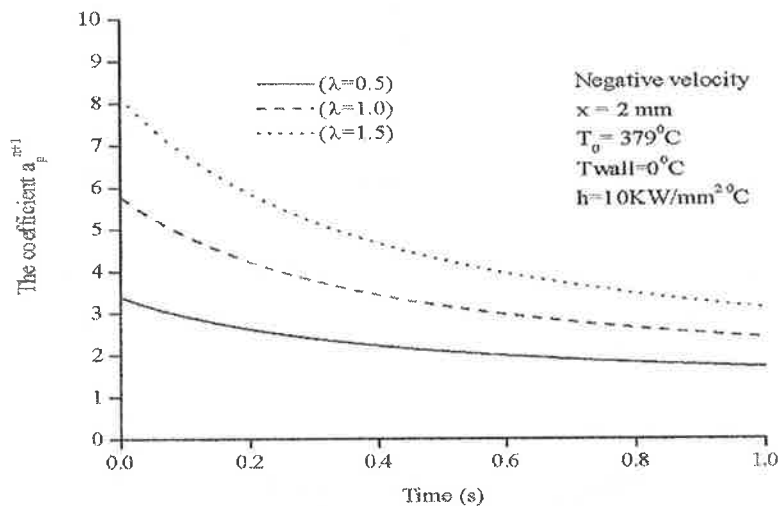


Figura 5.2 Coeficientes  $a_p^{i+1}$  del CVCM Convencional obtenidos para valores diferentes de  $\lambda = k \Delta t / \rho (\Delta x)$  y la Discretización Galerkin Estándar Implícita

Problemas de inestabilidad generados por valores de cero en la capacitancia se muestran en la Figura 5.3. Incrementos mayores en el número de Peclet hacen cambiar los coeficientes de un valor positivo a uno negativo. Una interpretación física de lo anterior es que las oscilaciones se presentan porque no hay un mecanismo efectivo para remover calor. Esto lleva a un sucesivo decremento en la variable dependiente, lo que produce oscilaciones.

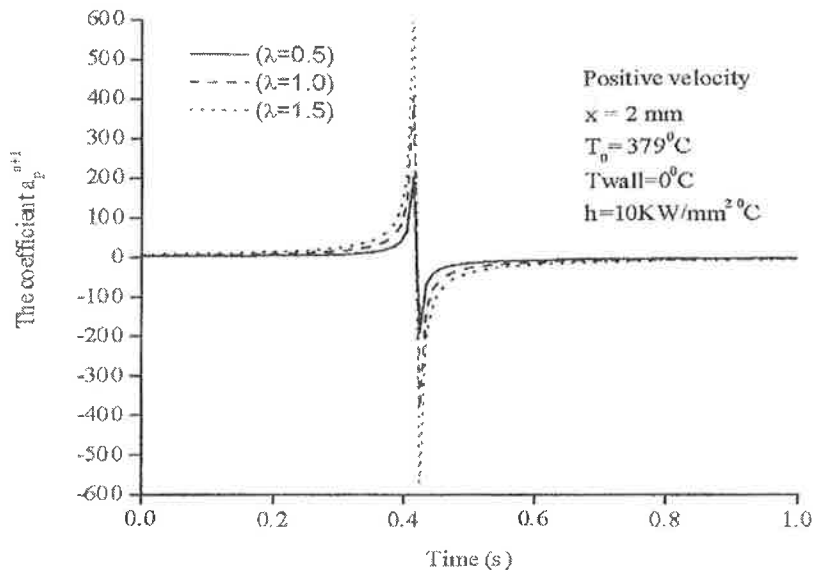


Figura 5.3 Coeficientes  $a_p^{i+1}$  del CVCM Convencional obtenidos para valores diferentes de  $\lambda = k \Delta t / \rho(\Delta x)$  y la Discretización Galerkin Estándar Implícita.

Multiplicando la Ecuación (5.4) por la expresión  $\rho(\Delta x)^2/k\Delta t$ , se obtienen los coeficientes del MCVC-M de la siguiente manera:

$$a_W^{n+1} = 1, \quad a_E^{n+1} = 1 \quad y \quad a_P^n = 2 + \frac{c}{\lambda} \quad (5.5)$$

De esta forma se eliminan las singularidades. Si la capacitancia toma valores de cero, un cambio de signo en la capacitancia tampoco representa un problema.

Las Figuras 5.4 y 5.5 muestran los coeficientes  $a_p^{n+1}$  para el MCVC-M los cuales se encuentran libres de problemas de inestabilidad en velocidades negativas. Para evitar



problemas mal condicionados se recurre a la siguiente condición de estabilidad (la cual asegura que el coeficiente  $a_p^{n+1}$  sea diferente de cero):

$$\frac{c}{k} \geq \lambda \quad (5.6)$$

Esto significa que la densidad de la malla y el intervalo de tiempo pueden ser seleccionados para tener al menos  $\lambda \cong 1$  y así evitar oscilaciones. El intervalo de tiempo y la densidad de la malla pueden ser seleccionados alternativamente con las expresiones:

$$\Delta t < \frac{\rho c (\Delta x)^2}{k} \quad (5.7)$$

$$\frac{\Delta t (k)}{\rho c} < (\Delta x)^2 \quad (5.8)$$

La Ecuación (5.8) tiene la ventaja de mantener la simetría en un sistema de ecuaciones de elemento finito. Una alternativa es considerar el MCVC, el cual puede ser obtenido por la ecuación de flujo de calor junto con la ecuación de energía. Donde el efecto de la convección es incluido en la conductividad, sin embargo en este trabajo solo estudiaremos el MCVC-M. Este método arroja los siguientes coeficientes en la discretización por el método de elemento finito:

$$a_W^{n+1} = 1, \quad a_E^{n+1} = 1 \quad \text{y} \quad a_P^n = 2 + \frac{c\rho(\Delta x)^2}{2k\Delta t} \quad (5.9)$$

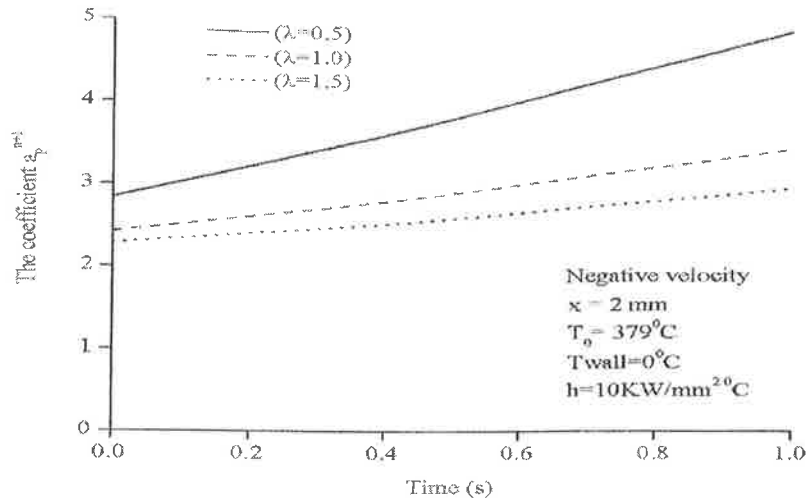


Figura 5.4 Coeficientes  $a_p^{i+1}$  del CVCM Modificado obtenidos para valores diferentes de  $\lambda = k \Delta t / \rho(\Delta x)$  y la Discretización Galerkin Estándar Implícita, con velocidades negativas.

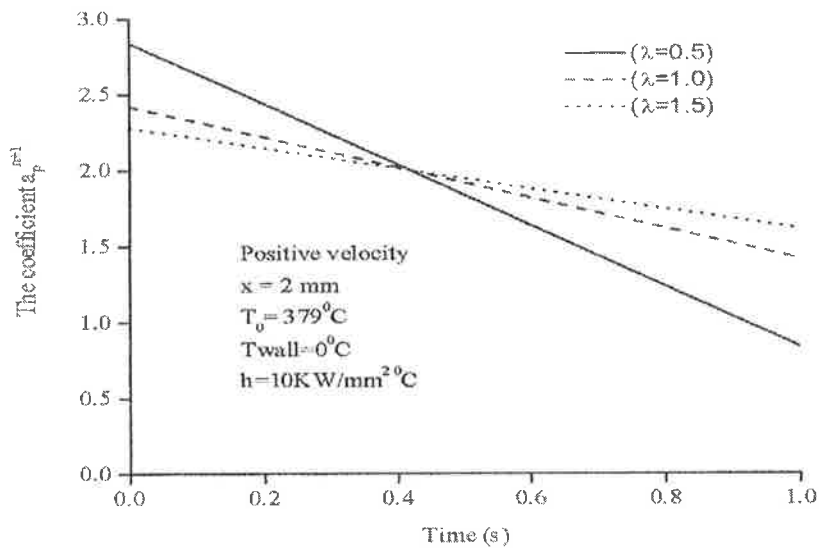


Figura 5.5 Coeficientes  $a_p^{i+1}$  del CVCM Modificado obtenidos para valores diferentes de  $\lambda = k \Delta t / \rho(\Delta x)$  y la Discretización Galerkin Estándar Implícita, con velocidades positivas.

## 5.2 Discretización del (MCVC-M)

Consideremos la ecuación de la conducción del calor dependiente del tiempo en una dimensión con velocidad, confinada al dominio  $0 < x < L$  la cual es la siguiente:

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} + v \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} - \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \quad (5.10)$$

Si consideramos que no hay movimiento de flujo entonces la Ecuación (5.10) se transforma en la siguiente Ecuación:

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \quad (5.11)$$

Para obtener la forma en diferencias finitas de la Ecuación (5.11), los dominios de  $x$  y de  $t$  están divididos dentro de pasos pequeños  $\Delta x$  y  $\Delta t$  como se ilustran en la Figura 5.1, de modo que:

$$x = m \Delta x \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots, M \quad (5.12a)$$

$$t = t \Delta x \quad t = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (5.12b)$$

donde la región  $0 < x < L$  es dividida en  $M$  sub-regiones iguales cada tamaño en:

$$M = \frac{L}{\Delta x} \quad (5.12c)$$

y hay  $M+1$  nodo para  $m=0$  a  $m=M$ , como se muestra en la Figura 5.6. El nodo  $m$  corresponde a la localización de quien la coordenada es  $x = m \Delta x$ . Vamos  $T_m$  es la temperatura en el nodo  $m$ ; entonces la región  $M+1$  contiene los nodos de la temperatura para  $m = 0, 1, 2, 3, \dots, M$  nodos.

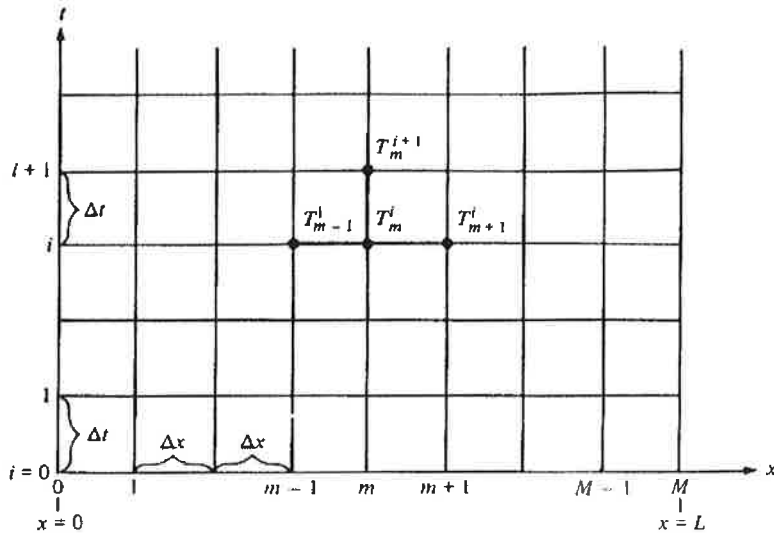


Figura 5.6 Sub-división del dominio  $xt$  dentro de los intervalos  $\Delta x$  y  $\Delta y$  para la representación de una Dimensión en Diferencias Finitas.

Entonces la temperatura  $T(x,t)$  en la localización de  $x$  y en el tiempo  $t$  es denotado por el símbolo  $T_m^i$  que es:

$$T(x,t) = T(m \Delta x, i \Delta t) \equiv T_m^i \quad (5.12d)$$

La segunda derivada de la temperatura  $d^2T(x)/dx^2$  en un nodo  $m$  puede ser representada en diferencias finitas. Considerar la localizaciones  $(m+1/2)$  y  $(m-1/2)$  como se ilustra en la Figura 5.7.

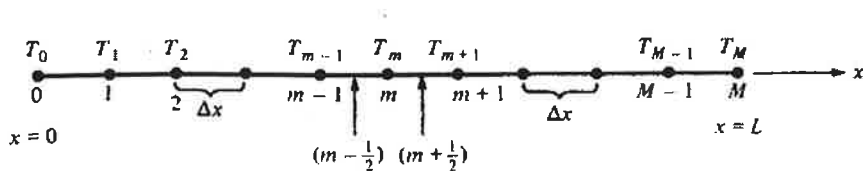


Figura 5.7 Nomenclatura para la representación de las derivadas por Diferencias Finitas.

La primera derivada de la temperatura  $dT(x)/dx$  en esas dos localizaciones puede ser representada como:

$$\left. \frac{dT(x)}{dx} \right|_{m+1/2} \cong \frac{T_{m+1} - T_m}{\Delta x} \quad (5.13a)$$

y

$$\left. \frac{dT(x)}{dx} \right|_{m-1/2} \cong \frac{T_m - T_{m-1}}{\Delta x} \quad (4.13b)$$

Por lo que la segunda derivada de la temperatura  $d^2T(x)/dx^2$  en el nodo  $m$  puede ser aproximada como:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2 T(x)}{dx} \right|_m &\cong \frac{\left. \frac{dT}{dx} \right|_{m+1/2} - \left. \frac{dT}{dx} \right|_{m-1/2}}{\Delta x} \\ &= \frac{T_{m-1} - 2T_m + T_{m+1}}{(\Delta x)^2} \end{aligned} \quad (5.14)$$

Usando ésta formulación varias derivadas aparecieron en la ecuación de conducción de calor (5.11), las cuales son representadas en diferencias finitas. La segunda derivada de la temperatura con respecto a  $x$ , en una posición  $m \Delta x$  y en un tiempo  $i \Delta t$ , es representado en la forma de diferencias finitas como fue descrita en la ecuación anterior donde si la reacomodamos de la siguiente manera encontramos que:

$$\left. \frac{\partial^2 T(x)}{\partial x} \right|_{m,i} \cong \frac{T_{m-1}^i + T_{m+1}^i - 2T_m^i}{(\Delta x)^2} \quad (5.15a)$$

donde  $T_{m-1}^i$  y  $T_{m+1}^i$  son los dos puntos vecinos del nodo  $T_m^i$ , y todos son evaluados en el tiempo  $i \Delta t$ .

La primera derivada de la temperatura con respecto a la variable del tiempo  $t$  en la posición  $n \Delta x$  y el tiempo  $i \Delta t$  es representada por:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial t} \right|_{m,i} \cong \frac{T_m^i - T_m^{i-1}}{\Delta t} \quad (5.15b)$$

donde  $T_m^{i-1}$  es la temperatura en la localización  $m \Delta x$  en el tiempo  $(i-1)\Delta t$ . El numerador en la Ecuación (5.15b) es una formulación por diferencias finitas hacia atrás de los cambios de la temperatura en el nodo  $m$  de  $i \Delta t$  a  $(i-1)\Delta t$ .

Sustituyendo la Ecuación (5.15b) en la Ecuación (5.11), obtenemos la forma de la ecuación de conducción de calor dependiente del tiempo para una dimensión por diferencias finitas la cual será:

$$\frac{T_m^i - T_m^{i-1}}{\Delta t} - \alpha \left( \frac{T_{m-1}^i - 2T_m^i + T_{m+1}^i}{(\Delta x)^2} \right) = 0 \quad (5.16)$$

Después de hacer algunas manipulaciones algebraicas y despejando a  $T_m^{i-1}$  de la Ecuación (5.16) obtenemos que:

$$T_m^{i-1} = \left( 1 + 2\alpha \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \right) T_m^i - \alpha \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} T_{m-1}^i - \alpha \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} T_{m+1}^i \quad (5.17)$$

La Ecuación (5.17) nos sirve para determinar el valor de la primera temperatura, la cual se utilizará después en el programa donde se irán calculando las temperaturas siguientes teniendo el valor de las temperaturas previamente ya determinadas, para lo cual vamos a despejar el valor  $T_m^i$  de la Ecuación (5.17) y lo que obtendremos es la siguiente ecuación:

$$T_m^i = \frac{T_m^{i-1} + \alpha \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} T_{m-1}^i + \alpha \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} T_{m+1}^i}{\left(1 + 2\alpha \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}\right)} \quad (5.18)$$

Sabemos que el coeficiente de la difusión es  $\alpha = k/\rho c$  donde en esta ecuación se utilizará el valor de  $c = 0.0068$  donde se obtendrá un primer valor para  $\alpha$ , ya que posteriormente en el transcurso del programa el valor de la capacitancia irá cambiando con respecto al comportamiento de la temperatura. Si sustituimos el valor de  $\alpha$  en la Ecuación (5.17) y el resultado de multiplicar  $\alpha \cdot \Delta t / (\Delta x)^2$  será conocido como  $\lambda$ . Por lo tanto tenemos que:

$$\lambda = k \cdot \Delta t / \rho (\Delta x)^2 \quad (5.19)$$

Por lo que si sustituimos a la Ecuación (5.19) en la Ecuación (5.17) por comodidad obtenemos la siguiente ecuación:

$$T_m^{i-1} = (1 + 2\lambda) T_m^i - \lambda T_{m-1}^i - \lambda T_{m+1}^i \quad (5.20)$$

Lo que sigue es introducir la capacitancia ahora en la Ecuación (5.20) por lo que obtenemos la siguiente Ecuación:

$$T_m^{i-1} = \left(1 + 2 \frac{\lambda}{c}\right) T_m^i - \frac{\lambda}{c} T_{m-1}^i - \frac{\lambda}{c} T_{m+1}^i \quad (5.21)$$

por lo que se obtiene un nuevo arreglo el cual se desea probar, esto es factorizando a la capacitancia y después de algunas manipulaciones algebraicas y despejando a  $T_m^{i-1}$  se obtiene:

$$T_m^{i-1} = \frac{\left(\frac{c}{\lambda} + 2\right) T_m^i - T_{m-1}^i - T_{m+1}^i}{\left(\frac{c}{\lambda}\right)} \quad (5.22)$$

Ahora para obtener las demás temperaturas después de la primera iteración, necesitamos determinar la temperatura siguiente  $T_m^i$  conociendo a la temperatura anterior  $T_m^{i-1}$  por lo que despejando  $T_m^i$  de la Ecuación (5.22) tenemos que:

$$T_m^i = \frac{\left(\frac{c}{\lambda}\right) T_m^{i-1} + T_{m-1}^i + T_{m+1}^i}{\left(2 + \frac{c}{\lambda}\right)} \quad (5.23)$$

Esta es la ecuación que se tiene que resolver por medio de una solución numérica para poder obtener las temperaturas en función de la capacitancia, ya que al ir cambiando la capacitancia va cambiando también la temperatura actual.



## 5.4 MCVC-M para la transferencia del calor en estado transitorio sobre un dominio semi-infinito con un Numero de Peclet Alto

Un problema de transferencia de calor mas realista donde la convección es dominante (números de Peclet altos) es solucionado en esta sección. El problema junto con condiciones de la malla y con condiciones de frontera se representa en la Figura 5.1, donde está la longitud del modelo es  $L = [0, \infty)$ . Una solución analítica para este problema unidimensional semi-infinito está disponible [40]. El material empleado para esta prueba es el Zamak 5 identificado por los parámetros físicos del material tabulado en Tabla 5.1. Las soluciones del MCVC-M son comparadas con las desventajas de soluciones numéricas descritas en la sección A.1 del apéndice A. Una comparación de perfiles de temperatura típica entre el MCVC-M y los esquemas de referencia, es presentada en la Figura 5.8, para números negativos de Peclet no-dominantes. En un examen de la figura anterior, el MCVC-M se apega a las soluciones numérica y analítica. La Figura 5.9 proporciona los diagramas de los perfiles de temperatura para convección dominante. El esquema de diferencias centrales (el cual es similar al método de Bubnov-Galerkin) es dejado para mostrar las oscilaciones típicas.

	Material (Zamak 5)
Thermal Conductivity of Solid (W/m°C)	108
Thermal Conductivity of Liquid (W/m°C)	50
Heat Capacitance of Solid (J/kg°C)	419
Heat Capacitance of Liquid (J/kg°C)	505
Density of Solid (kg/m <sup>3</sup> )	6800
Density of Liquid (kg/m <sup>3</sup> )	6600
Latent Heat (kJ/kg)	126
Solidus Temperature (°C)	380
Liquidus Temperature (°C)	386
Mushy Zone	Linear

Tabla 5.1 Propiedades del material para las pruebas numéricas.

Una prueba es propuesta donde diferentes procedimientos son adoptados para investigar la sensibilidad del MCVC-M en problemas unidimensionales. La norma del error de temperatura es proporcionada y es definida como:

$$\text{Max}_{i,n} \left\| \frac{T_i^{na} - T_i^{nb}}{T_i^{nb}} \right\| \times 100\% \quad (5.24)$$

donde el subíndice  $i$  representa las temperaturas nodales a lo largo de los primeros cien milímetros del dominio semi-infinito, y  $n$  significa el paso en el tiempo. Los exponentes  $a$  y  $b$  indican soluciones analíticas y puntos de referencia numéricos. Normas de errores de temperatura son tabuladas en la Tabla 2 para varios valores del tiempo-paso donde la densidad del acoplamiento es  $\Delta x = 0.01$  (10 000 elementos). Los resultados fueron obtenidos usando un algoritmo implícito el paso en el tiempo de Euler y las ecuaciones no lineares fueron solucionadas usando un método de bisección para capacitancia. Ninguna falla de convergencia en la unión fue encontrada en todos los pasos en el tiempo adoptados. Está claro que el método no es muy sensible al aumento en pasos en el tiempo en comparación con esquemas de referencia.

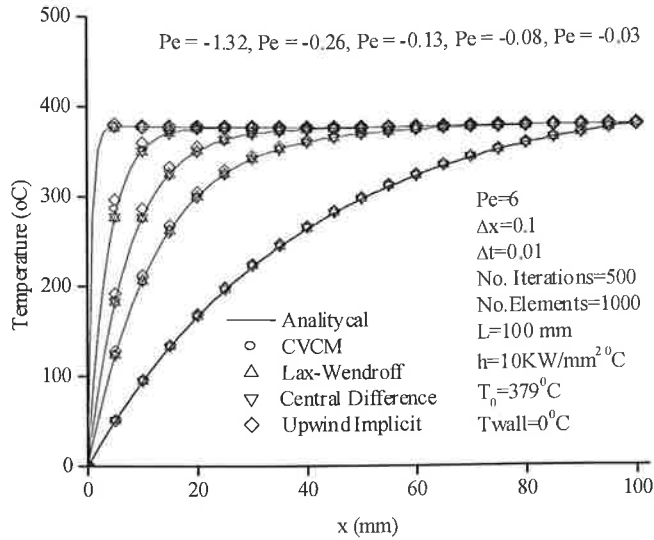


Figura 5.8 Muestra una comparación típica de los perfiles de temperatura entre el MCVC y las soluciones patrón para bajas velocidades.

Es aparente que de un examen de ésta figura el MCVC tiene una buena aceptación con las soluciones exactas y numéricas.

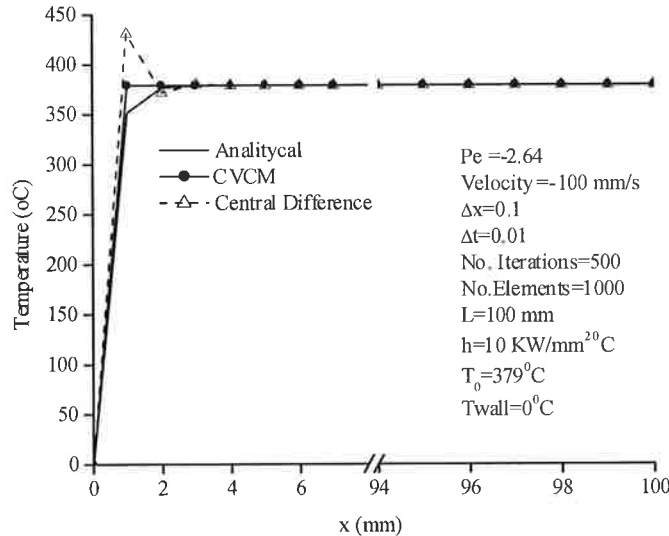


Figura 5.9 Muestra una comparación de los perfiles de las temperaturas entre el MCVC y las soluciones patrón para altas velocidades relativas.

Scheme	Time-step $\Delta t$ (s)			
	0.05	0.01	0.005	0.001
CVCM	1.95E-05	1.65E-06	8.97E-07	4.46E-07
Lax-Wendroff	4.79E-07	2.53E-07	2.03E-08	2.55E-07
Central Difference	1.74E-05	1.55E-06	8.51E-07	4.27E-07
Full Implicit Difference	1.48E-05	1.19E-06	6.05E-07	2.53E-07

Tabla 5.2 Muestra muestra la norma del error para valores de paso en el tiempo donde el valor de la densidad de la malla es  $\Delta x = 0.01$

Para la solidificación típica, considerar la Ecuación (2.35) sujeta a la condición inicial:

$$T(x,0) = 398^\circ C \quad (5.25)$$

y las condiciones de frontera:

$$T(0,t) = 0 \quad (5.26)$$

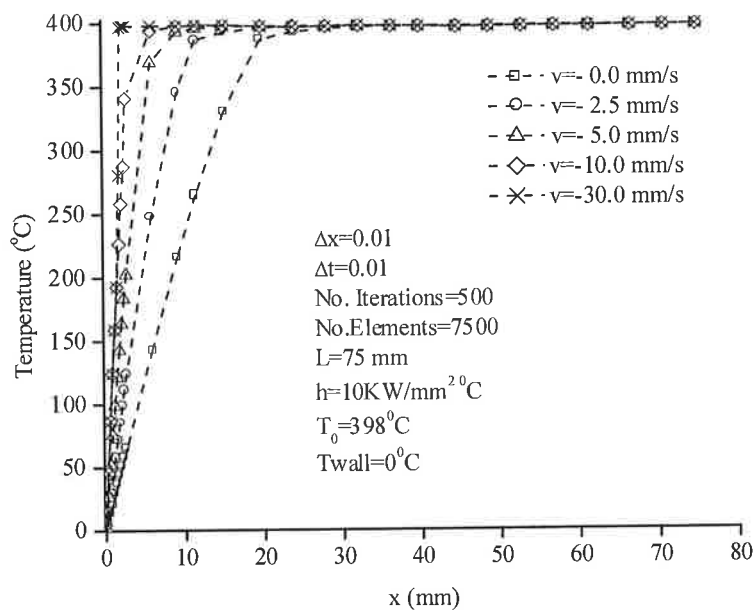
$$T(375,t) = 398^\circ C \quad (5.27)$$

La Figura 5.10 muestra una comparación de los perfiles de temperatura para diferentes velocidades negativas bajas. La mayoría de los esquemas numéricos populares producen oscilaciones y a menudo fallan para éste arreglo de velocidades. Por el contrario, la solución del MCVC-M está libre de oscilaciones. Problemas de convergencia no fueron encontrados. También, los resultados obtenidos usando un algoritmo implícito de Euler de paso en el tiempo reformulado y las ecuaciones no lineales fueron resueltas usando un método de bisección para mejorar la convergencia.

Consideremos el mismo problema para la función típica pero con una condición inicial:

$$T(x,0) = 0 \quad (5.28)$$

La condición inicial fue invertida para tomar en cuenta la aplicación de velocidades altas positivas.



La Figura 5.10 muestra una comparación de los perfiles de temperatura con el MCVC, sobre un dominio semi-infinito del Zamak 5 para velocidades negativas.

# Capítulo Seis

## PRUEBAS NUMÉRICAS

---

El punto principal de esta sección es evaluar el termino capacitancia combinando transporte de masa y transferencia de calor sobre un dominio semi-infinito en 1-D para varios números de Peclet. Las pruebas numéricas fueron organizadas como sigue:

- 1) Análisis de oscilación
- 2) Análisis de Capacitancia del Volumen de Control
- 3) Análisis de Transferencia de Calor Convectiva-Difusiva en estado transitorio sobre un Dominio Semi-Infinito en 1-D.

El acoplamiento de la malla empleado junto con las condiciones iniciales y de frontera están representadas en la Figura 5.1. Algunas Soluciones numéricas están disponibles para un número limitado de condiciones de frontera [40]. Los coeficientes y el orden de precisión de los esquemas numéricos empleados para comparación en este documento están dados en las tablas 1 y 2 respectivamente. El método fue codificado en Math-Lab 2005 en una computadora Dell Precision Work Station 670, Intel Xeon de 3.2 GHz y 2 Gb de memoria RAM.

## 6.1 Análisis de Oscilaciones.

Es conveniente examinar el comportamiento de algunos esquemas numéricos inestables bien conocidos para varios números de Peclet preestablecidos. Las propiedades del material para estas pruebas están dadas en la Tabla 5.1, del capítulo anterior. Los siguientes esquemas son examinados:

- 1) Diferencias Centrales Finitas
- 2) Upwind de primer orden
- 3) Híbrido
- 4) Power Law
- 5) Exponencial
- 6) Lax Wendroff

Estos métodos están descritos en [43 y 121]. En problemas de transferencia de calor convectivos-difusivos en 1-D, hay tres principales reglas que un esquema numérico debe seguir en orden para evitar inestabilidades numéricas [43], estas son:

- 1) Los coeficientes del sistema de ecuaciones deben seguir la relación
$$a_p^{n+1} = a_E^{n+1} + a_W^{n+1} + a_E^n + a_W^n + a_p^n ,$$
- 2) Los coeficientes nunca deben ser cero a lo largo de la diagonal de la matriz principal
- 3) Los coeficientes a lo largo de las diagonales secundarias pueden llegar a ser cero, pero nunca cambiar de signo.

El comportamiento de los coeficientes para los esquemas probados en este experimento numérico pueden ser observados en la Tabla 6.1, donde fueron seleccionado 3 números de Peclet estratégicamente, los cuales fueron:  $Pe = 0$ ,  $-2$  y  $-15$ . En esa tabla es evidente que las reglas que se mencionaron renglones arriba son violadas por el esquema de diferencias centrales y por la técnica de Lax Wendroff para un número de Peclet  $Pe \leq -2$  y  $Pe \leq -15$ , respectivamente. La inestabilidad numérica inducida en estos esquemas puede ser observada en la Figura 6.1, en forma de oscilación numérica. Inversamente puede también observarse que el esquema Upwind y la técnica Lax Wendroff son inexactos en comparación con otros esquemas en rangos de pequeños números de Peclet, por ejemplo de  $-2 \leq Pe \leq 2$ .

Coefficientes	Central difference	Upwind	Hybrid	Power law	Exponential	Lax Wendroff
$Pe = 0$ ( $n = 100$ ; $v = 0$ ; $\Delta x = 1$ ; $\Delta t = 0.01$ ; $t = 1$ ; Zamak 5)						
$(a_p^{n+1})_p^a$	0.25776	0.25776	0.25776	0.25776	0.25776	0.37905
$a_p^{n+1}$	1.1955	1.1955	1.1955	1.1955	1.1955	1
$(a_p^{n+1})_p^a$	0.25776	0.25776	0.25776	0.25776	0.25776	0.37905
$a_p^{n+1}$	0.68	0.68	0.68	0.68	0.68	0.24189
$Pe = -2$ ( $n = 100$ ; $v = -75$ ; $\Delta x = 0.001$ ; $\Delta t = 1$ ; $t = 0.5$ ; Zamak 5)						
$(a_p^{n+1})_p^a$	0.51552	0.77328	0.51552	0.59998	0.59621	0.07869
$a_p^{n+1}$	7.3155	7.831	7.3155	7.4844	7.4769	1
$(a_p^{n+1})_p^a$	-4.5768E-6	0.25776	0	0.08446	0.08069	0.00287
$a_p^{n+1}$	6.8	6.8	6.8	6.8	6.8	0.91844
$Pe = -15$ ( $n = 50$ ; $v = -568.5$ ; $\Delta x = 1$ ; $\Delta t = 0.001$ ; $t = 0.01$ ; Zamak 5)						
$(a_p^{n+1})_p^a$	2.191	4.1242	3.8664	3.8664	3.8664	0.48385
$a_p^{n+1}$	7.3155	11.182	10.666	10.666	10.666	1
$(a_p^{n+1})_p^a$	-1.6755	0.25776	0	0	1.1824E-6	-0.08474
$a_p^{n+1}$	6.8	6.8	6.8	6.8	6.8	0.60089

Tabla 6.1 Muestra el comportamiento de los coeficientes con diferentes números de Peclet en transferencia de calor transitoria.

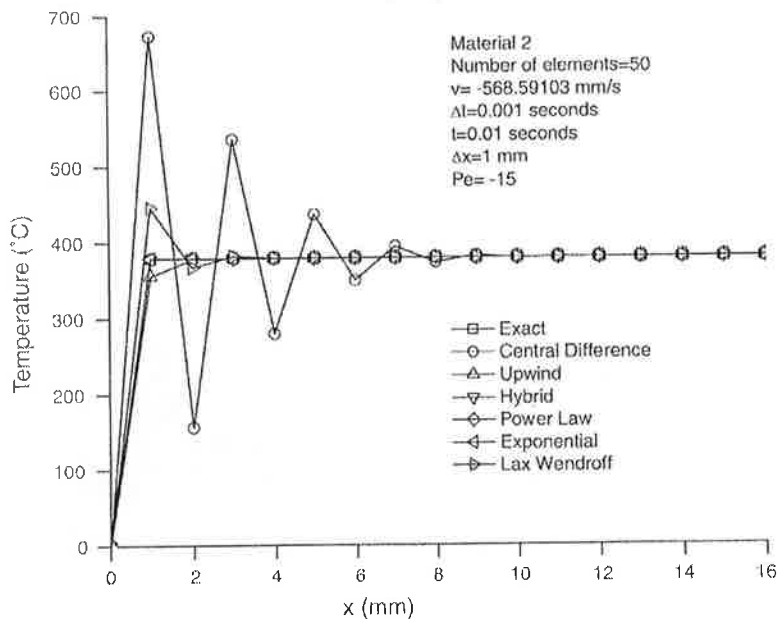


Figura 6.1 Muestra la inestabilidad numérica inducida en los diferentes esquemas numéricos.

Se puede observar en la Tabla 6.2, que la norma del error de temperatura fue calculada una vez que los esquemas alcanzaron el estado estable, utilizando la Ecuación (5.24). La inexactitud introducida por los esquemas Upwind y Lax Wendroff cuando una malla de densidad gruesa es usada se muestra en la Figura 6.3. También, problemas de inestabilidad en forma de oscilaciones espaciales son ya observados. Por otro lado, la desventaja con el esquema Power Law es que la derivación de la solución no tiene justificación física, pero es simplemente un procedimiento apropiado para una curva y los coeficientes de la ecuación diferencial tienen que ser ajustados a cero, para números



de Peclet mas grandes que 10, los cuales introducen inexactitudes. La necesidad de una aproximación alternativa es requerida.

Numerical scheme	Peclet number ( $Pe$ )				
	-3.50	5.00E-06	0.025	2	15
	<i>Error norm</i>				
Central difference	31.23	1.20E-09	0.020	100	7.22E+59
Upwind	19.80	1.24E-07	5.062	257100	5.81E+49
Hybrid	3.11	1.20E-09	0.0209	100	100
Power law	0.19	1.17E-09	0.0008	99.58	100
Exponential	2.22E-14	1.14E-09	5.40E-09	4.88E-07	100

Tabla 6.2 Muestra la norma del error de temperatura para una transferencia de calor transitoria.

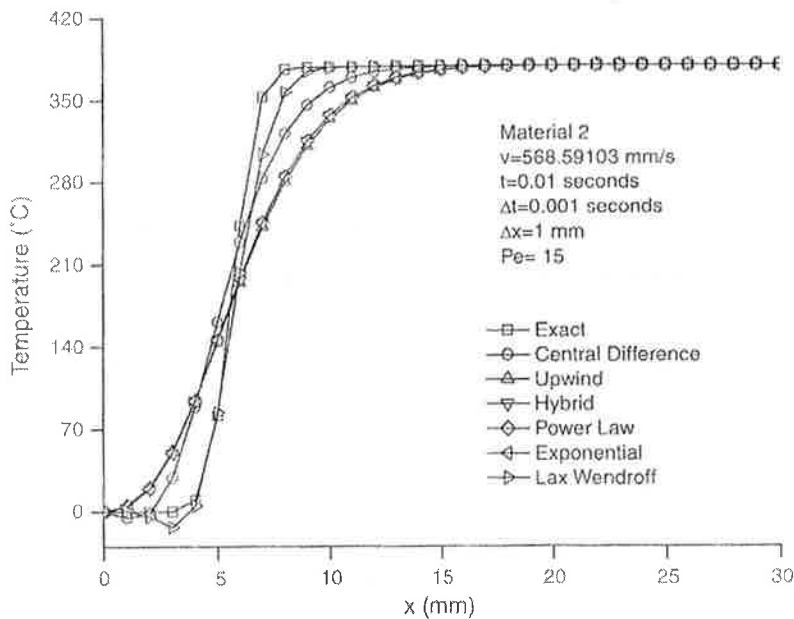


Figura 6.3 Muestra la imprecisión de algunos esquemas numéricos populares, el esquema numérico de Lax Wendroff presenta una oscilación numérica para un número de  $Pe=15$ .

## 6.2 Análisis de la Capacitancia de Volumen de Control.

El punto principal de esta sección es evaluar el comportamiento de la capacitancia para diferentes números de Peclet. Escribamos a la Ecuación (4.35) de la forma:

$$c (T^{n+1} - T^n) \Delta x = (h^{n+1} - h^n) \Delta x + \rho v \Delta t (\bar{h}_e - \bar{h}_w) \quad (6.1)$$

Una capacitancia sin cambio de signo es requerida para soluciones libres de oscilaciones. Considere el bajo enfriamiento de un material arbitrario circunscrito para un dominio semi-infinito en una 1-D. Si el material se está moviendo con una velocidad preescrita mientras que el volumen de control es fijado espacialmente, entonces hay tres casos que pueden ocurrir.

Caso 1. Retiro de material en  $x = 0$ ; en esta situación, el material se mueve hacia la superficie en  $x = 0$ . Esto hace que el termino de capacitancia sea siempre positiva, por ejemplo:

$$\left[ \left( (h^{n+1} - h^n) \Delta x + v \Delta t (\bar{h}_e - \bar{h}_w) \right) / (T^{n+1} - T^n) \Delta x \right] \geq 0 \text{ desde que,}$$

$(h^{n+1} - h^n) / (T^{n+1} - T^n) \geq 0$  y  $v \Delta t (\bar{h}_e - \bar{h}_w) / (T^{n+1} - T^n) \Delta x \geq 0$  para las condiciones de prueba.

Caso 2. Medio de acrecentamiento suave; Esta situación se puede todavía considerar físicamente realista. La capacitancia es positiva y se mantiene con el mismo signo si el termino convectivo es mas bajo que el término inestable, por ejemplo:

$$\left| (h^{n+1} - h^n) \Delta x \right| \geq \left| v \Delta t (\bar{h}_e - \bar{h}_w) \right| \text{ donde } h^{n+1} - h^n \text{ y } v(\bar{h}_e - \bar{h}_w) \text{ tienen signos opuestos.}$$

Caso 3. Medio de acrecentamiento severo; la capacitancia cambia de signo positivo a negativo si el término temporal llega a ser más pequeño que el término convectivo, por ejemplo:

$$\left| (h^{n+1} - h^n) \Delta x \right| < \left| v \Delta t (\bar{h}_e - \bar{h}_v) \right|$$
 y donde otra vez  $h^{n+1} - h^n$  y  $v(\bar{h}_e - \bar{h}_v)$  tienen signos opuestos.

Sin embargo, el caso 3 es físicamente irreal y poco probable de suceder en situaciones tales como el proceso cuasi-estático encontrado en formación semi-sólida [121-123]. Las expresiones (3.3), (3.5) y (4.35) son ecuaciones basadas en el marco Euleriano. Esto significa que la malla la cual está definida por coordenadas espaciales con condiciones de frontera mantenidas fijas espacialmente mientras que el material con energía cruza la malla.

Consideremos las propiedades del material dadas para el material Zamak 5, las cuales están dadas en la Tabla 5.1. El comportamiento de la capacitancia se muestra en las Figuras 6.4 y 6.5 para los casos de retiro de material y para los casos medio de acrecentamiento, respectivamente. Por simplicidad, la velocidad usada para estas pruebas se asumió constante y preestablecida. Notemos que para el caso de retiro de material, la capacitancia nunca cruzará la línea que divide al cero. Esto hace que la solución numérica sea más estable y garantice una solución físicamente realista para todos los números de Peclet o a altas velocidades. La situación poco realista del caso medio de acrecentamiento severo caso 3 es evidenciado en la Figura 6.5, donde es evidente que los volúmenes de control que están más cerca de las condiciones de frontera rápidamente corren fuera de la energía. Como una consecuencia la capacitancia cruza la línea que divide al cero.

Una alternativa para evitar la desventaja introducida por el caso 3 puede ser el uso de una condición de estabilidad.

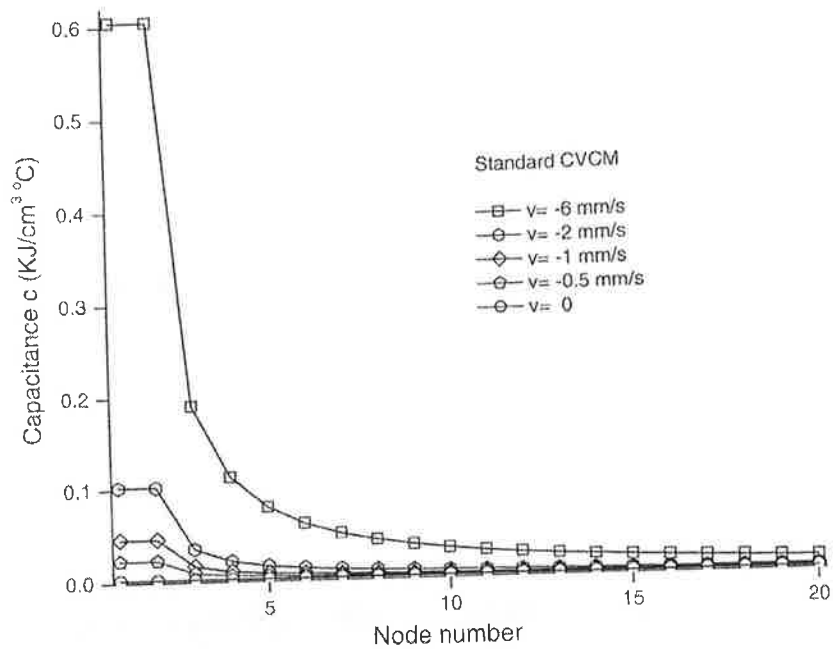


Figura 6.4 Muestra los perfiles de capacitancia obtenidos con el MCVC- Convencional, para el caso 1.

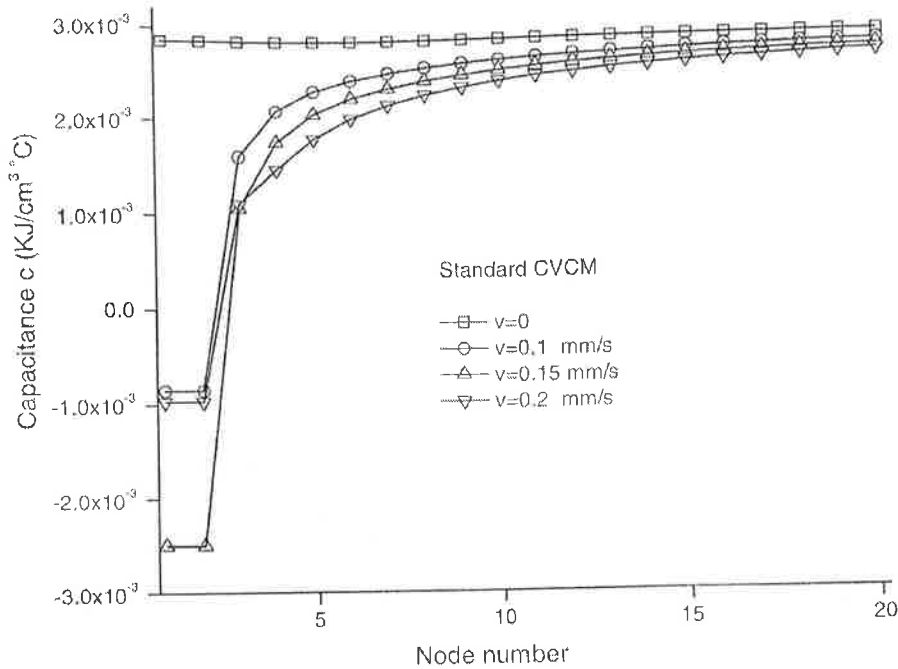


Figura 6.5 Muestra los perfiles de capacitancia obtenidos con el MCVC- Convencional, para el caso 2.

### 6.3 Transferencia de Calor Convectivo-Difusivo Transitorio sobre un Dominio Semi-Infinito en 1-D.

Las oscilaciones numéricas han sido atribuidas por Yu y Heinrich [22] esencialmente a los dos términos de naturaleza parabólica y elíptica los cuales manifiestan ellos mismos que están dentro de una solución de oscilación natural siempre que el tamaño de la malla exceda cierto valor crítico. Esto mismo se manifiesta usualmente con un cambio de signo en los coeficientes a lo largo de las diagonales secundarias del sistema de ecuaciones. El resultado es un sistema de ecuaciones perturbado singularmente. Para superar esta desventaja la discretización de la Ecuación (5.3) es reorganizada en esta sección. Comencemos considerando la solución estándar dada por la Ecuación (5.3), la cual es:

$$a_p^{n+1} T_p^{n+1} = a_E^{n+1} T_E^{n+1} + a_W^{n+1} T_W^{n+1} + a_E^n T_E^n + a_W^n T_W^n + a_p^n T_p^n$$

donde los coeficientes para  $\theta = 1$  están redefinidos por

$$a_W^{n+1} = a_E^{n+1} = c^{-1}, \quad a_p^n = \lambda^{-1} \quad \text{y} \quad a_p^{n+1} = \lambda^{-1} + 2c^{-1} \tag{6.2}$$

donde  $\lambda = k(\Delta t / \Delta x^2)$ .

En la Figura 6.6 se muestra el comportamiento del coeficiente  $a_p^n$  para el caso de Medio de acrecentamiento suave. Como resultado, se observan las singularidades en los coeficientes  $a_w^{n+1} = a_E^{n+1}$  y  $a_p^{n+1}$ .

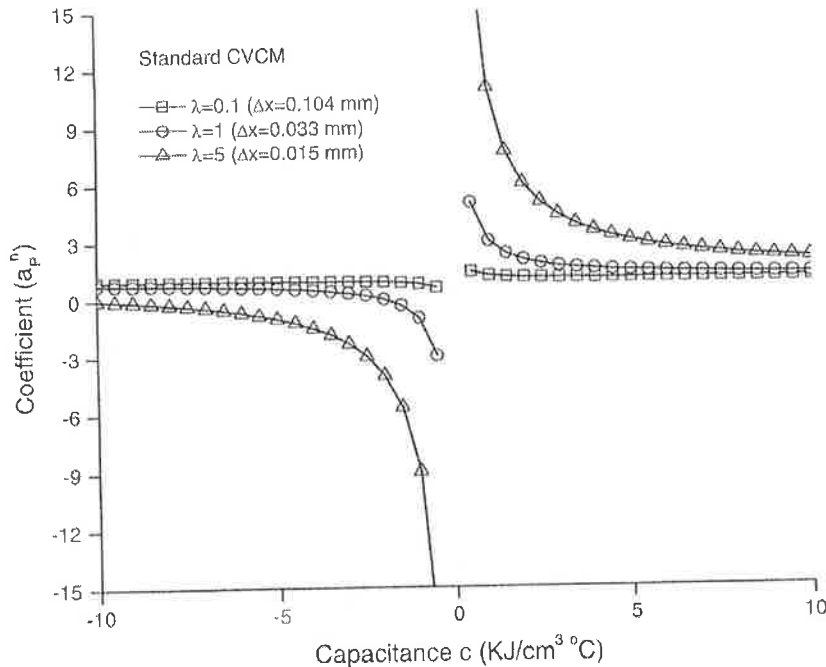


Figura 6.6 Muestra el comportamiento de los coeficientes para el MCVC- Convencional (ecuación 6.2) para el caso 2.

Un método alternativo para retardar la posibilidad de tener singularidades en los coeficientes es reorganizando la Ecuación (6.2):

$$a_w^{n+1} = a_E^{n+1} = 1, \quad a_p^n = c\lambda^{-1} \quad \text{y} \quad a_p^{n+1} = c\lambda^{-1} + 2 \quad (6.3)$$

Las gráficas de los coeficientes obtenidos con la Ecuación (6.3) son mostrados en la Figura 6.7. Otras posibilidades de tener situaciones de perturbación singular pueden ser evitadas satisfaciendo la siguiente condición en el nivel del volumen de control.

$$|(c\lambda^{-1})_e| < 2$$

(6.4)

Donde el subíndice  $e$  significa un elemento del volumen de control. La ecuación (6.4) puede ser aplicada a la capacitancia del volumen de control  $e$  que está cerca del cruce de la línea que divide al cero.

El término  $\lambda$  puede ser incrementado reduciendo la densidad del mallado del volumen de control  $e$  y así que la condición  $|(c\lambda^{-1})_e| < 2$  puede ser satisfecha.

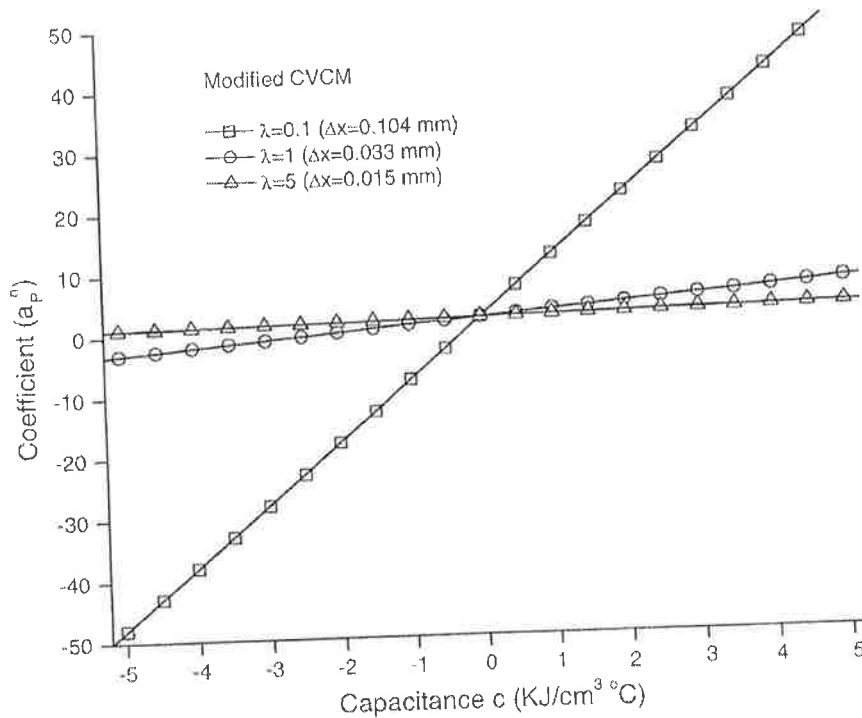


Figura 6.7 Muestra el comportamiento de los coeficientes para el MCVCM- Modificado (ecuación 6.3) para el caso 2.

El Método de Capacitancia de Volumen de Control es aplicado para modelar problemas de transferencia de calor convectivos-difusivos inestables, sobre un dominio semi-infinito en 1-D. En la Figura 6.8 se muestra una comparación de los perfiles de temperatura entre las aproximaciones estándar y la modificada dadas por las Ecuaciones (6.2) y (6.3), respectivamente. Las propiedades del material para esta prueba son las

mismas para el Zamak 5 dadas en la Tabla 5.1. El buen acoplamiento con la solución exacta es evidente. En la Tabla 6.4 se observa el comportamiento de los coeficientes para el caso con remoción de material, incluyendo la velocidad cero. El buen acoplamiento entre el metodo modificado y la solución exacta es presentada en las Figuras 6.9 y 6.10, para historias y perfiles de temperatura, respectivamente.

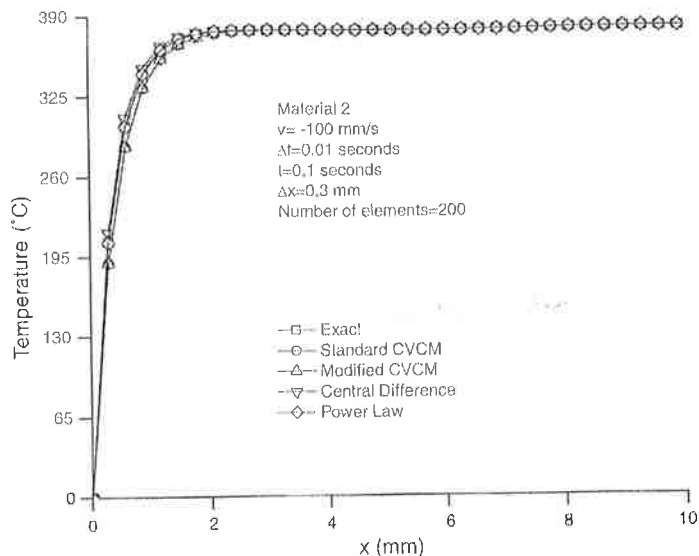


Figura 6.8 Muestra la comparación entre el los MCVC- Modificado y el Convencional, además del método Exacto.

Coefficient	Standard CVCM (Eq. (31)) Node		Modified CVCM (Eq. (32)) Node	
	2	10	2	10
<i>v = -100 mm/s (n = 200; Δx = 0.3; Δt = 0.01; Zamak 5)</i>				
$(a_E^{n+1})a_E^n$	3.46e-9	0.087	1	1
$a_E^{n+1}$	83.33	83.508	4.34e+10	604.98
$(a_M^{n+1})a_M^n$	3.46e-9	0.087	1	1
$a_M^{n+1}$	83.33	83.33	4.34e+10	602.98
<i>v = -3 mm/s (n = 200; Δx = 0.3; Δt = 0.01; Zamak 5)</i>				
$(a_E^{n+1})a_E^n$	5.5396	80.634	1	1
$a_E^{n+1}$	94.412	244.6	17.043	3.0335
$(a_M^{n+1})a_M^n$	5.5396	80.634	1	1
$a_M^{n+1}$	83.333	83.333	15.043	1.0335
<i>v = -1 mm/s (n = 200; Δx = 0.3; Δt = 0.01; Zamak 5)</i>				
$(a_E^{n+1})a_E^n$	21.435	187.23	1	1
$a_E^{n+1}$	126.2	457.8	5.8878	2.4431
$(a_M^{n+1})a_M^n$	21.435	187.23	1	1
$a_M^{n+1}$	83.333	83.333	3.8878	0.44505
<i>v = 0.000001 mm/s (n = 200; Δx = 0.3; Δt = 0.01; Zamak 5)</i>				
$(a_E^{n+1})a_E^n$	350.98	350.98	1	1
$a_E^{n+1}$	785.29	785.29	2.2374	2.2374
$(a_M^{n+1})a_M^n$	350.98	350.98	1	1
$a_M^{n+1}$	83.333	83.333	0.23743	0.23743

Tabla 6.4 Muestra el comportamiento de los coeficientes para varias velocidades.



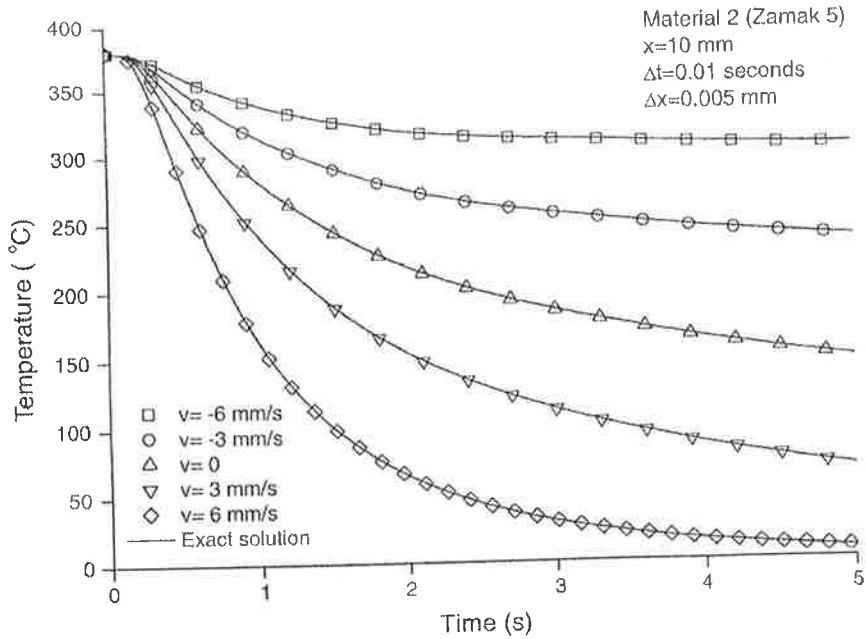


Figura 6.9 Muestra la comparación de las historias de temperatura entre el MCVC-Modificado y el Exacto.

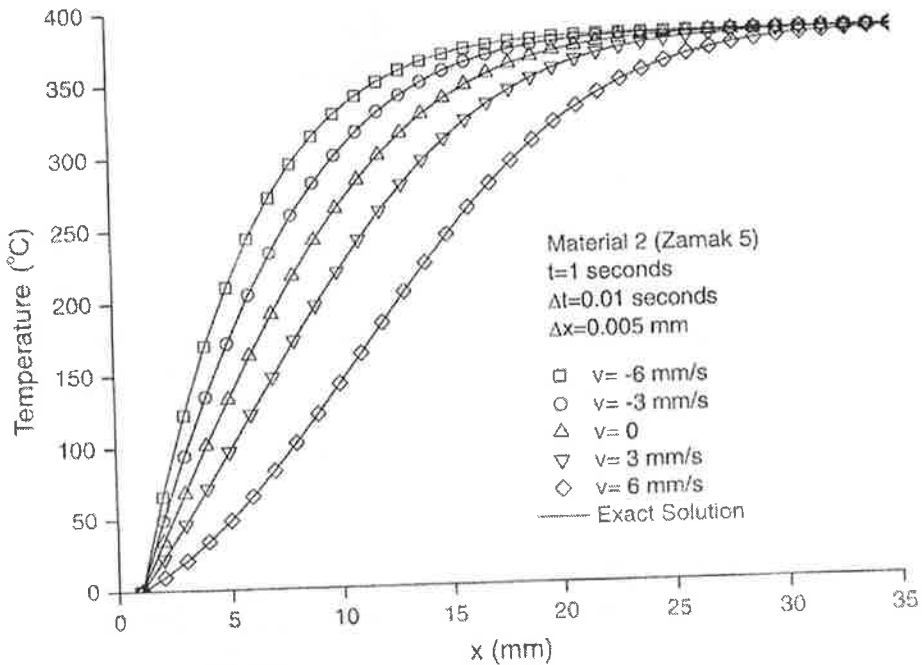


Figura 6.10 Muestra la comparación de los perfiles de temperatura entre el MCVC-M y el Exacto.

# *Capítulo Siete*

## **RESULTADOS OBTENIDOS**

---

Los resultados se presentan después de haber obtenido la solución numérica de la ecuación diferencial mediante un programa el cual se desarrolló con la ayuda del Software de Math-Lab. Dicho programa se desarrolló para comparar los Métodos de Capacitancia de Volumen de Control Convencional y el Modificado. Encontrándose que los resultados obtenidos con el MVC-M son mejores que el Método Convencional, como lo demuestran las siguientes figuras y tablas. Para poder hacer una comparación entre los dos métodos mencionados comencemos con el Método Convencional para grandes velocidades negativas que oscilaron entre: 0, -5, -10 y -100  $mm/s$  dichas velocidades fueron tomadas a una distancia de  $x = 10\ mm$ .

En la Figura 7.1 se muestra el comportamiento del  $\Delta h$  general para las velocidades antes mencionadas notándose que al comienzo es una línea recta de valor cero, pero al ir aumentando la velocidad negativa, el  $\Delta h$  va aumentando observándose que forma casi una parábola al ir transcurriendo el tiempo de 1 segundo.

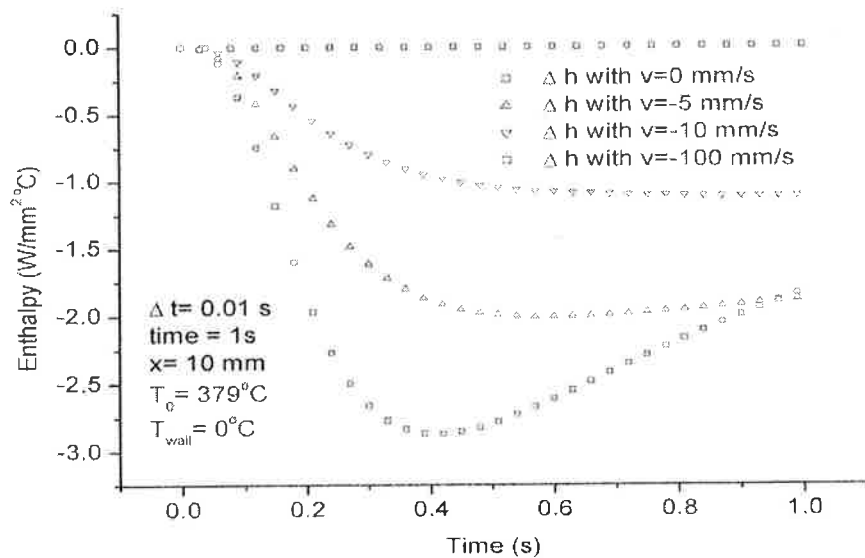


Figura 7.1 Comportamiento del término de la energía  $\Delta h$  a diferentes velocidades negativas, utilizando el Método Convencional.

En la Figura 7.2 se muestra el comportamiento del  $\Delta T$  general para las velocidades de 0, -5, -10 y -100 mm/s notándose que casi se tiene una similitud con la gráfica de la entalpía, ya que al comienzo es una línea recta de valor cero, pero al ir aumentando la velocidad negativa, el  $\Delta T$  va aumentando observándose que forma casi una parábola al ir transcurriendo el tiempo de 1 segundo.

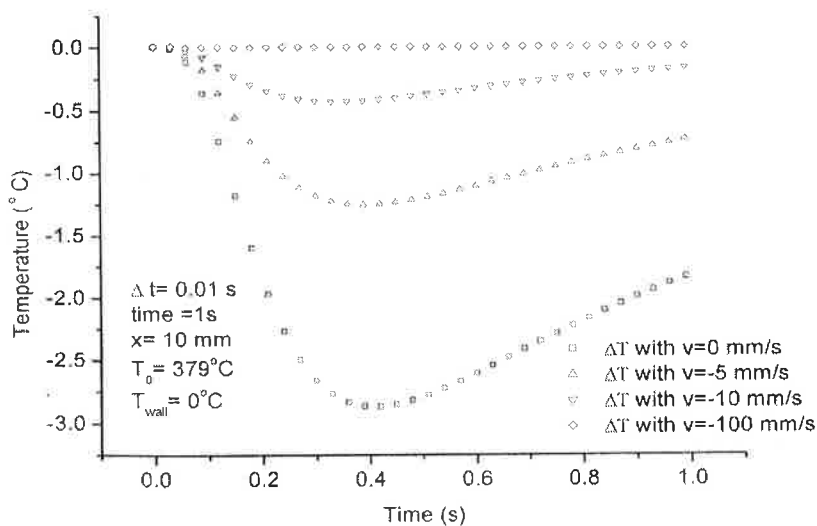


Figura 7.2 Comportamiento del término de la temperatura  $\Delta T$  a diferentes velocidades negativas, utilizando el Método Convencional.

En la Figura 7.3 se muestra el comportamiento de la capacitancia general para las velocidades de 0, -5, -10 y -100 mm/s notándose que cuando se utilizó una velocidad de 0 el resultado de la capacitancia fue una línea recta horizontal por lo que al ir aumentando las velocidades negativas se notó como la grafica va aumentando en el sentido opuesto a las manecillas del reloj, hasta formar una línea recta de 45 grados a una  $v = -100 \text{ mm/s}$ . Posteriormente se realizaron las siguientes pruebas para el mismo Método Convencional pero para pequeñas velocidades tanto positivas como negativas las cuales oscilaron entre valores de:

-0.75, -0.5, -0.25, -0.10, 0.10, 0.25, 0.5 y 0.75 mm/s dichas velocidades fueron tomadas a una distancia de  $x = 10 \text{ mm}$ .

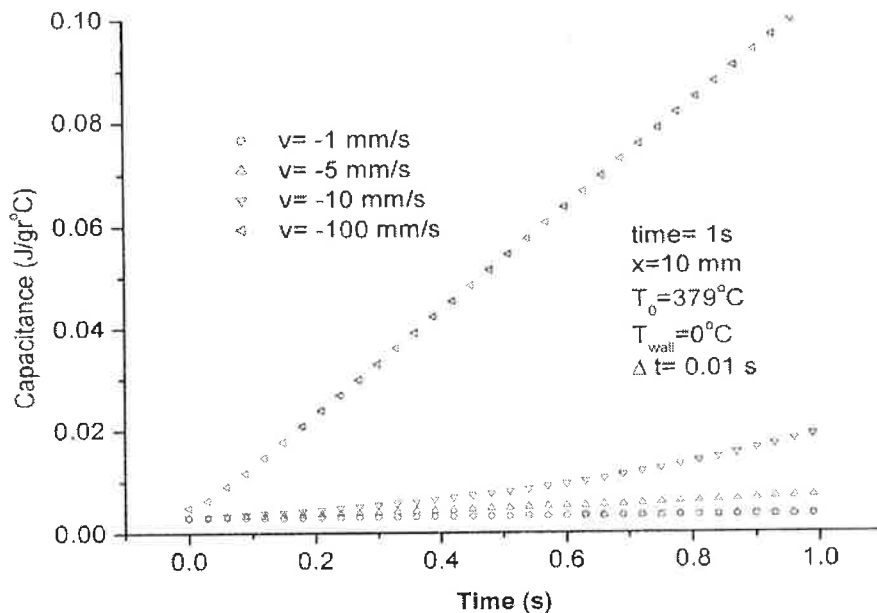


Figura 7.3 Comportamiento del término Capacitancia  $c$  a diferentes velocidades negativas, utilizando el Método Convencional.

En la Figura 7.4 se muestra como va cambiando el  $\Delta h$  general para diferentes velocidades al ir transcurriendo el tiempo de 1 segundo, se observa que al comienzo todas las velocidades están unas encima de las otras pero al llegar cerca de la línea media tienden a disminuir los valores de las velocidades negativas mientras que las positivas tienden ligeramente a incrementar sus valores para posteriormente cruzarse literalmente y casi al final los valores de las velocidades positivas son inferiores a los de las velocidades negativas.

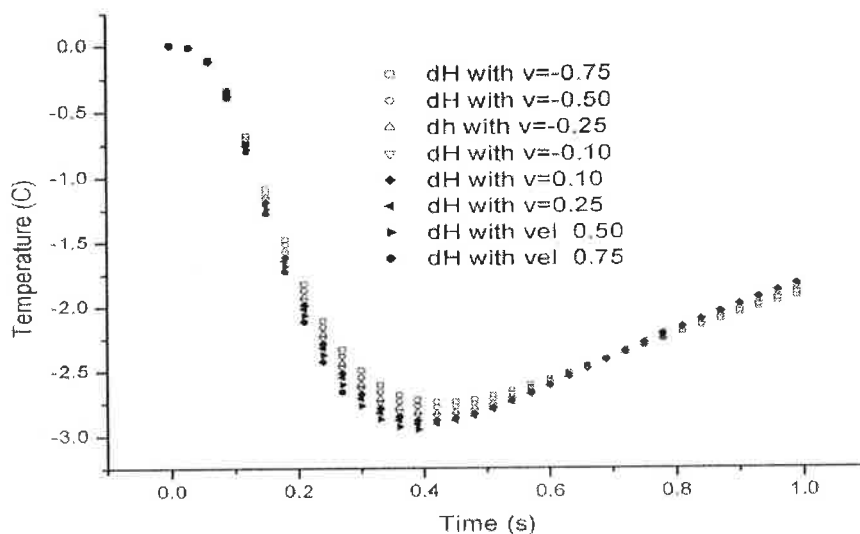


Figura 7.4 Comportamiento del término de la energía  $\Delta h$  a diferentes velocidades pequeñas tanto negativas como positivas, utilizando el Método Convencional.

La Figura 7.5 muestra como va cambiando el  $\Delta T$  general para diferentes velocidades a ir transcurriendo el tiempo de 1 segundo, se observa que al comienzo las todas las velocidades están unas encima de las otras pero al llegar cerca de la línea media tienden a disminuir los valores de las velocidades negativas mientras que las positivas tienden ligeramente a incrementar sus valores y así mantenerse en una pendiente constante hasta transcurrir el tiempo especificado.

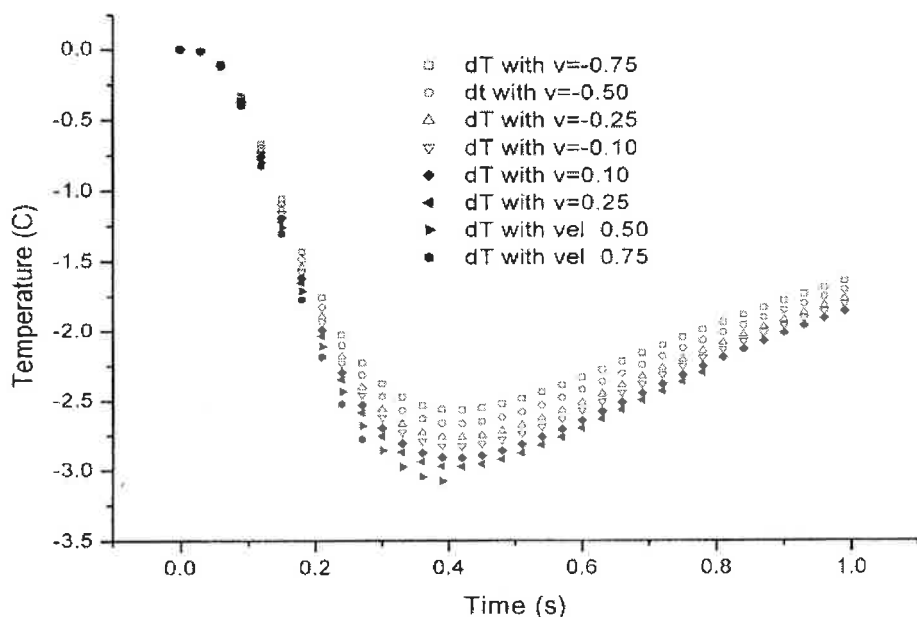


Figura 7.5 Comportamiento del término de la temperatura  $\Delta T$  a diferentes velocidades pequeñas tanto negativas como positivas, utilizando el Método Convencional.

La Figura 7.6 muestra la gráfica de la Capacitancia general para diferentes velocidades en función del tiempo, en la cual se observa que alcanza una pendiente máxima a una  $v = -0.75 \text{ mm/s}$  después se observa que al ir disminuyendo los valores negativos de las velocidades la Capacitancia va avanzando en el sentido de las manecillas del reloj donde se observa que dicha Capacitancia cruza el cero al ir aumentando la velocidad en valores positivos. Ahora realizaremos las siguientes pruebas utilizando el MVC-M para grandes velocidades positivas que oscilaron entre los: 0, 1, 5, 10 y 100  $\text{mm/s}$  dichas velocidades fueron tomadas a una distancia de  $x = 10 \text{ mm}$ .

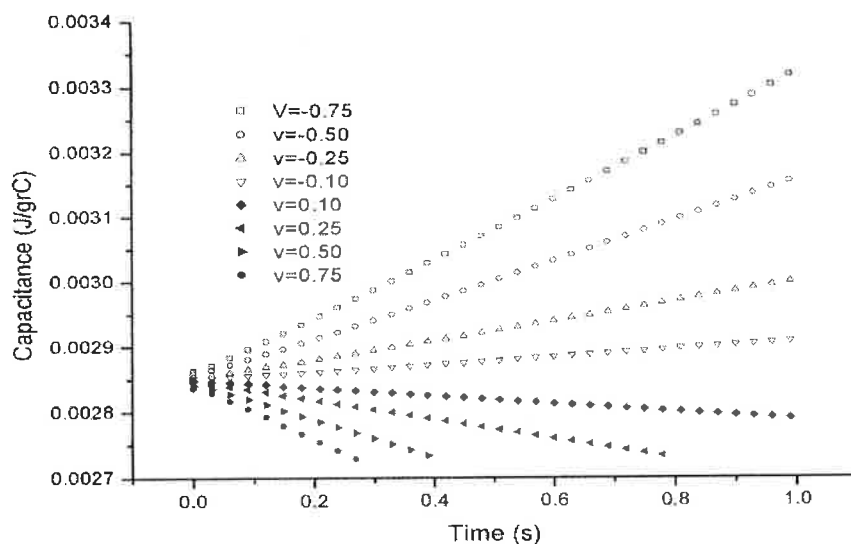


Figura 7.6 Comportamiento del término de Capacitancia  $c$  a diferentes velocidades pequeñas tanto negativas como positivas, utilizando el Método Convencional.

En la Figura 7.7 se muestra el comportamiento del  $\Delta h$  general para las velocidades antes mencionadas notándose que al comienzo es una ligera pendiente que después cerca de la línea media es casi constante, pero al ir aumentando la velocidad positiva, el  $\Delta h$  va aumentando en el sentido opuesto a las manecillas de reloj hasta formar una pendiente en forma de una semi campana al ir transcurriendo el tiempo de 1 segundo.

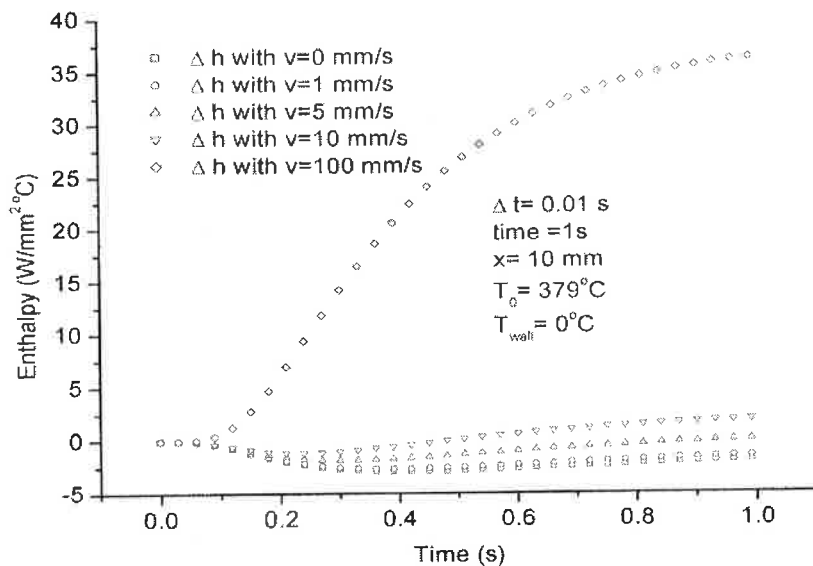


Figura 7.7 Comportamiento del término de la energía  $\Delta h$  a diferentes velocidades positivas, utilizando el Método Modificado.



En la Figura 7.8 se muestra el comportamiento del  $\Delta T$  general para las velocidades de 0, 1, 5, 10 y 100 mm/s notándose que los valores obtenidos están todos sobre una misma línea, dando como resultado una sola parábola invertida al ir transcurriendo el tiempo de 1 segundo.

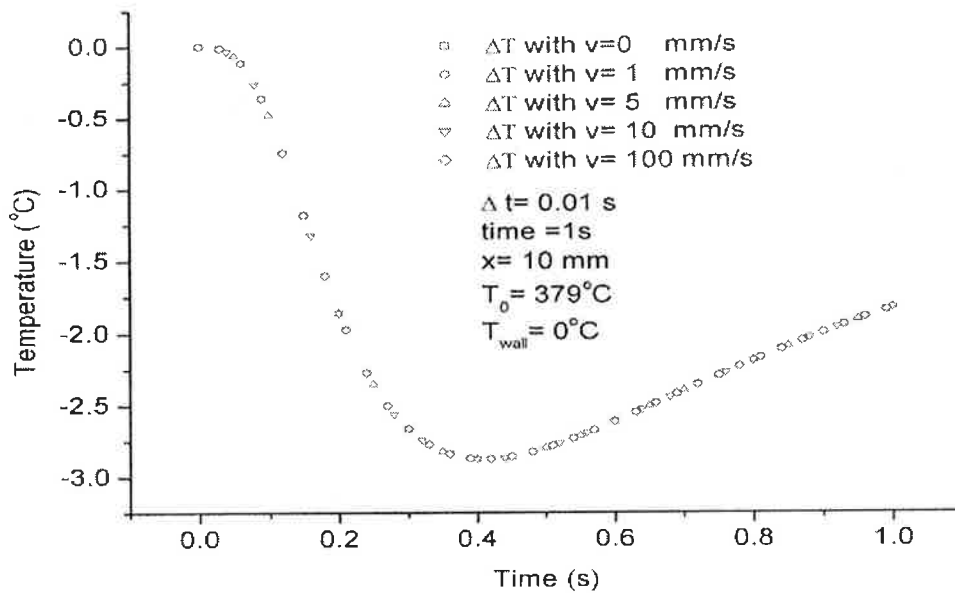


Figura 7.8 Comportamiento del término de la temperatura  $\Delta T$  a diferentes velocidades positivas, utilizando el Método Modificado.

En la Figura 7.9 se muestra el comportamiento de la capacitancia general para velocidades de 0, 1, 5, 10 y 100  $mm/s$  notándose que cuando se utilizó una velocidad de 0 el resultado de la capacitancia fue una línea recta horizontal por lo que al ir aumentando las velocidades positivas se notó como la grafica va aumentando en el sentido de las manecillas del reloj hasta formar una pendiente de casi 30 grados a una  $v=100 mm/s$ . Posteriormente se realizaron las siguientes pruebas con el mismo MVC-M pero para pequeñas velocidades tanto positivas como negativas las cuales oscilaron entre valores de:  $-0.75, -0.5, -0.25, -0.10, 0.10, 0.25, 0.5$  y  $0.75 mm/s$  dichas velocidades fueron tomadas a una distancia de  $x = 10 mm$ .

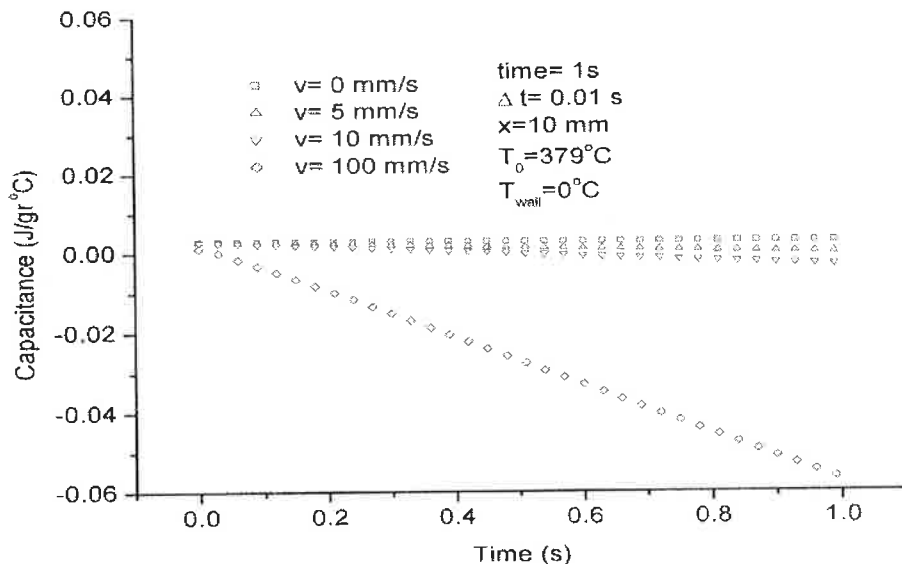


Figura 7.9 Comportamiento del término Capacitancia  $c$  a diferentes velocidades positivas, utilizando el Método Modificado.

En la Figura 7.10 se muestra como va cambiando el  $\Delta h$  general para diferentes velocidades al ir transcurriendo el tiempo de 1 segundo, se observa que al comienzo las todas las velocidades están todas en una misma línea pero al llegar un poco antes de la mitad tienden a disminuir los valores de las velocidades positivas mientras que las negativas tienden ligeramente a incrementar sus valores para posteriormente casi al final los valores de las entalpías con velocidades positivas son inferiores a los de los valores de las entalpías con velocidades negativas.

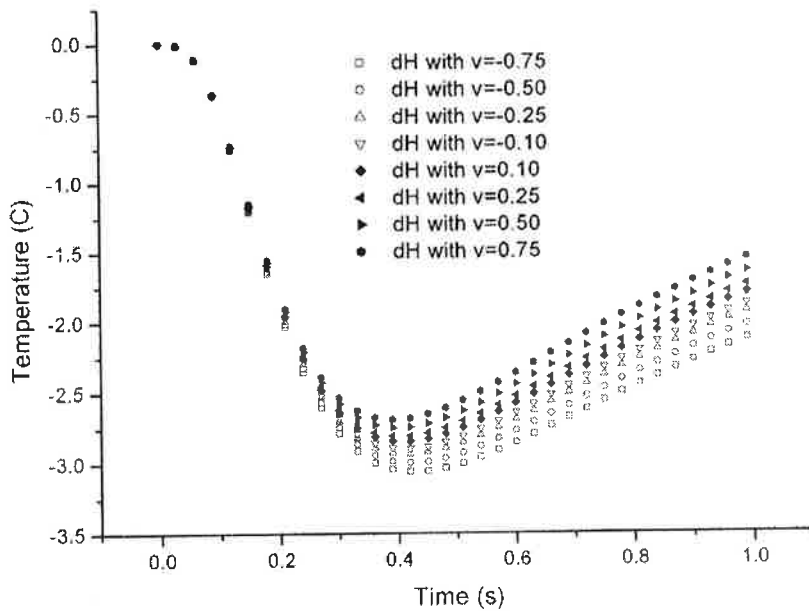


Figura 7.10 Comportamiento del término de la energía  $\Delta h$  a diferentes velocidades pequeñas tanto negativas como positivas, utilizando el Método Modificado.

En la Figura 7.11 se muestra el comportamiento del  $\Delta T$  general cuando es evaluado a diferentes velocidades al ir transcurriendo el tiempo de 1 segundo, como se observa en la gráfica todos los valores de las temperaturas se encuentran en una misma línea al ser evaluados a diferentes velocidades positivas o negativas.

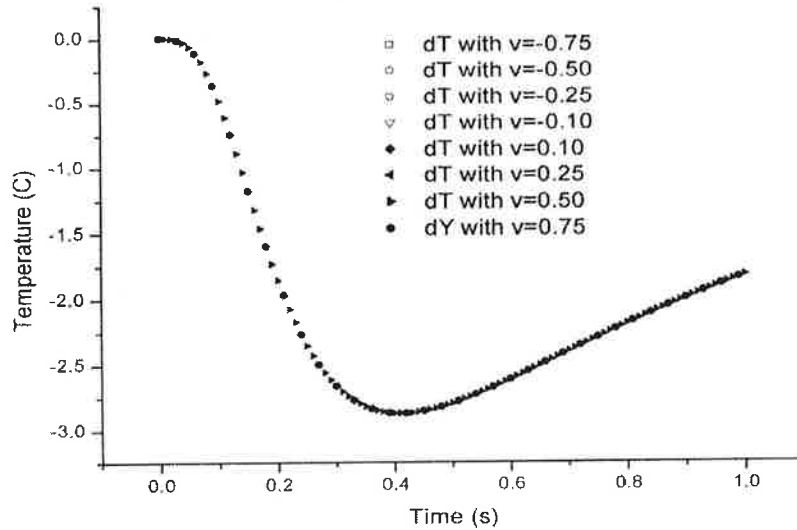


Figura 7.11 Comportamiento del término de la temperatura  $\Delta T$  a diferentes velocidades pequeñas tanto negativas como positivas, utilizando el Método Modificado.

En la Figura 7.12 se muestra el comportamiento de la capacitancia general para las velocidades de  $-0.75, -0.5, -0.25, -0.10, 0.10, 0.25, 0.5$  y  $0.75 \text{ mm/s}$  notándose que cuando se utilizó una velocidad de 0 el resultado de la capacitancia fue una línea recta horizontal por lo que al ir aumentando las velocidades positivas se notó como la grafica de la capacitancia va aumentando en el sentido de las manecillas del reloj hasta formar una pendiente de casi 30 grados a una  $v = 100 \text{ mm/s}$ . Por el contrario cuando se aplicaron las velocidades negativas se noto cómo la gráfica de la capacitancia va aumentando en el sentido opuesto a las manecillas del reloj hasta formar una pendiente de casi 30 grados a una  $v = -100 \text{ mm/s}$ . Ahora lo que se va a evaluar es a los dos métodos conjuntamente esto es; el Método Convencional y el MVC-M para grandes velocidades tanto positivas como negativas las cuales oscilaron entre valores de:  $-10, -5, -1, 1, 5$  y  $10 \text{ mm/s}$  respectivamente, dichas velocidades fueron tomadas a una distancia de  $x = 10 \text{ mm}$ .

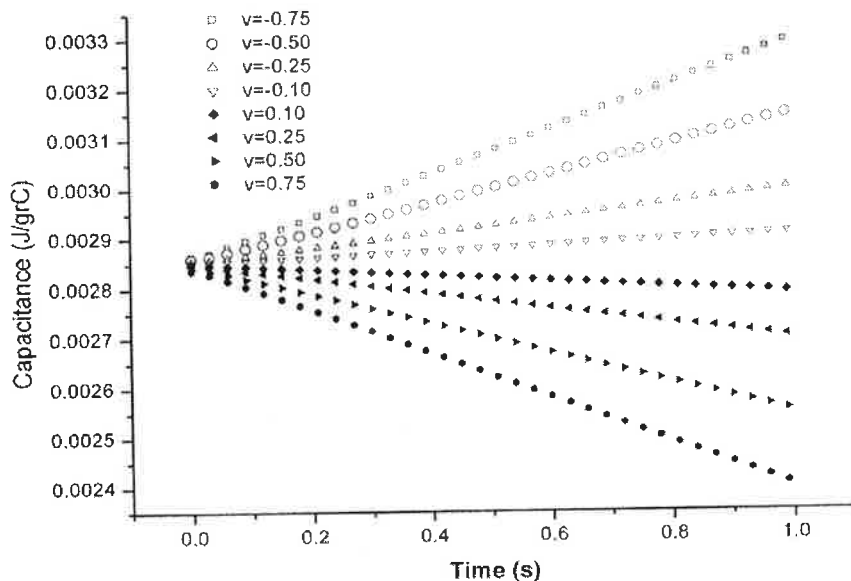


Figura 7.12 Comportamiento del término de Capacitancia  $c$  a diferentes velocidades pequeñas tanto negativas como positivas, utilizando el Método Modificado.

En la Figura 7.13 se muestra como es el comportamiento del  $\Delta h$  mixto cuando es evaluado a diferentes velocidades de entre  $-10$ ,  $-5$ ,  $-1$ ,  $1$ ,  $5$  y  $10$   $mm/s$  al ir transcurriendo el tiempo de 1 segundo. Donde se observó que cuando la entalpía  $\Delta h$  es evaluada con velocidades negativas ésta va disminuyendo hasta repuntar ligeramente al final del tiempo transcurrido de 1 segundo, además notamos que los valores están por debajo del cero. Pero cuando el valor de la entalpía  $\Delta h$  fué evaluada con velocidades positivas primeramente tienden a bajar para posteriormente incrementar sus valores en cuanto mayor sea la velocidad mayor será el valor de la entalpía la cual incluso pasa de valores negativo a valores positivos pasando por el cero.

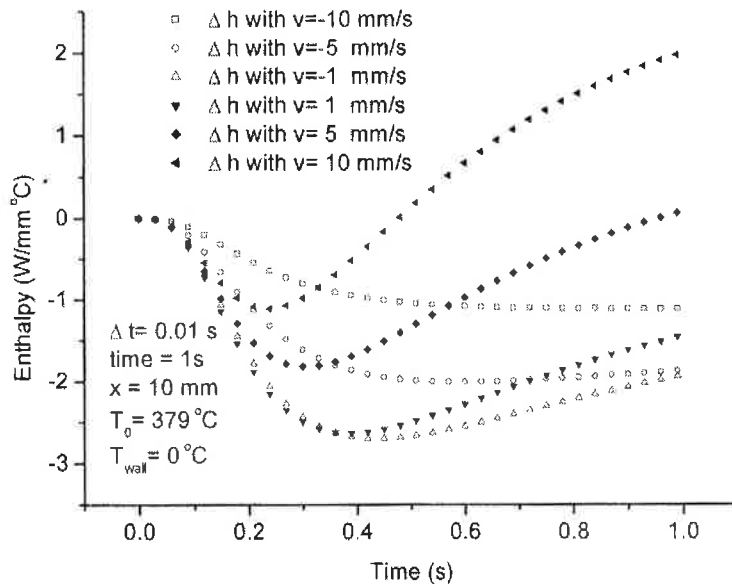


Figura 7.13 Muestra el comportamiento general de la energía  $\Delta h$  aplicando los dos Métodos el Convencional y el Modificado en conjunto, a diferentes velocidades tanto positivas como negativas.

En la Figura 7.14 se muestra el comportamiento del  $\Delta T$  mixto cuando es evaluado a diferentes velocidades de entre  $-10$ ,  $-5$ ,  $-1$ ,  $1$ ,  $5$  y  $10$   $mm/s$  al ir transcurriendo el tiempo de 1 segundo. Donde se observa que en cuanto el valor de la velocidad negativa esté mas alejado del cero el  $\Delta T$  tenderá a ser una línea recta.

Ahora cuando el valor de la velocidad positiva esté mas alejada del cero tenderá a hacer una parábola invertida, donde al llegar al tiempo transcurrido de 1 segundo el valor del  $\Delta T$  irá disminuyendo.

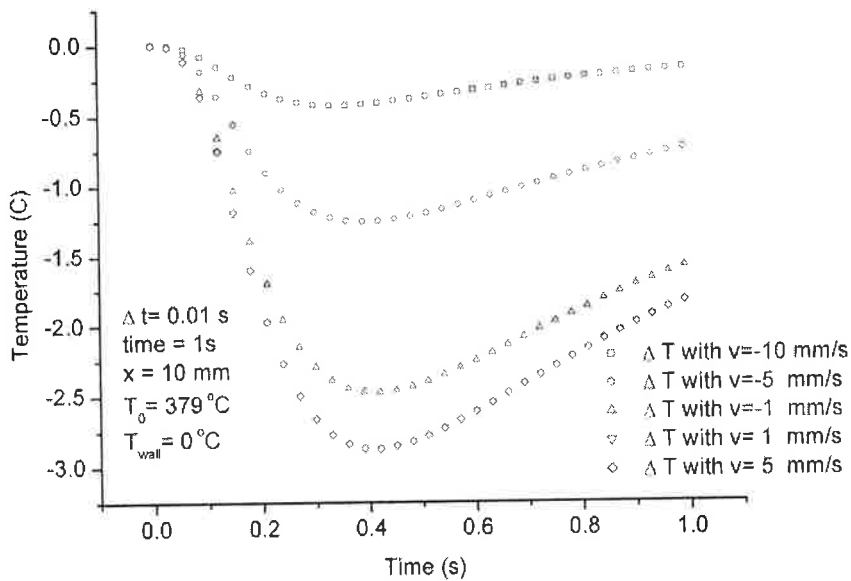


Figura 7.14 Muestra el comportamiento general de temperatura  $\Delta T$  aplicando los dos Métodos el Convencional y el Modificado en conjunto, a diferentes velocidades tanto positivas como negativas.

En la Figura 7.15 se muestra el comportamiento de la capacitancia mixta para las velocidades de entre  $-10$ ,  $-5$ ,  $-1$ ,  $1$ ,  $5$  y  $10$   $mm/s$  notándose que cuando se utilizó una velocidad de  $0$  el resultado de la capacitancia fue una línea recta horizontal por lo que al ir aumentando las velocidades positivas se notó como la grafica de la capacitancia va aumentando en el sentido de las manecillas del reloj hasta formar una pendiente de casi  $30$  grados a una  $v = 10$   $mm/s$ . Por el contrario cuando se aplicaron las velocidades negativas se noto cómo la gráfica de la capacitancia va aumentando en el sentido opuesto a las manecillas del reloj hasta formar una semi-curva a una  $v = -10$   $mm/s$ . Una prueba más que se realizo fue la del porcentaje de error al evaluar la temperatura que existe entre los dos Métodos el Convencional y el Modificado para lo cual se utilizaron las siguientes velocidades  $0$ ,  $1$ , y  $3$   $mm/s$  utilizando para la determinación de dicho porcentaje la siguiente (5.25) del capítulo anterior.

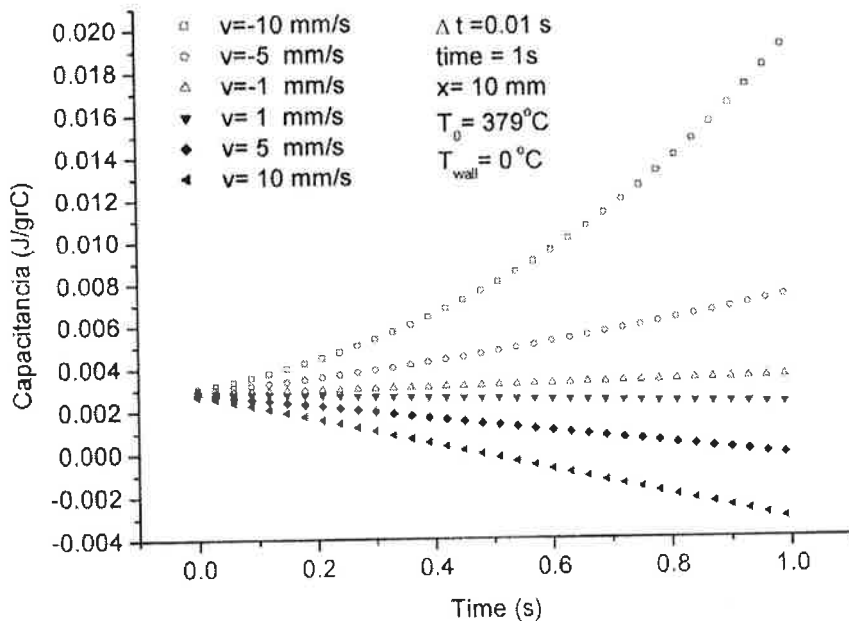


Figura 7.15 Muestra el comportamiento general de Capacitancia  $c$  aplicando los dos Métodos el Convencional y el Modificado en conjunto, a diferentes velocidades tanto positivas como negativas.



En la figura 7.16 se muestra el porcentaje del error al evaluar a la temperatura que hay entre los dos métodos utilizando para ello una  $v = 0 \text{ mm/s}$  donde como se puede apreciar los dos métodos están sobre la misma línea, por lo que no existe porcentaje de error para ésta velocidad.

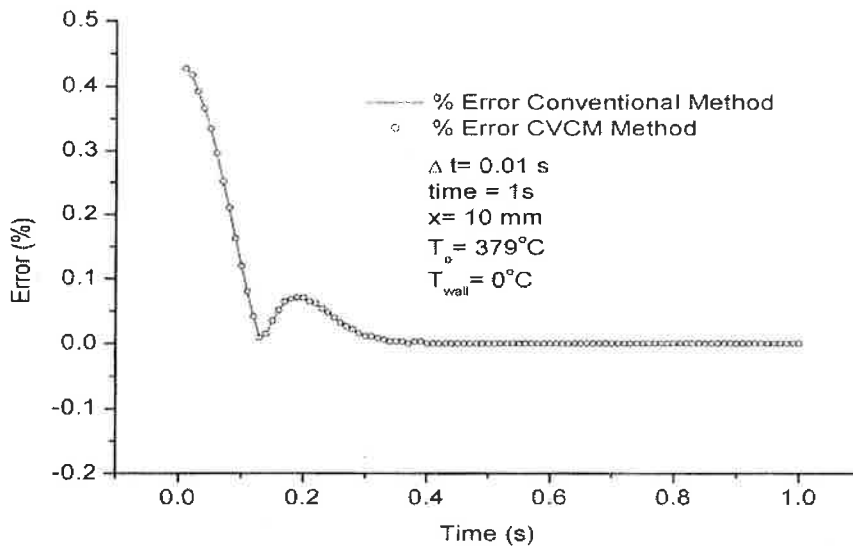


Figura 7.16 Muestra el porcentaje de error entre los dos Métodos el Convencional y el Modificado para una  $v = 0 \text{ mm/s}$ .

Pero cuando la  $v = 1 \text{ mm/s}$ , el porcentaje del error tiende a presentarse como lo muestra la Figura 7.17 donde se alcanza a preciar que es de alrededor del 8% de error entre ambos métodos.

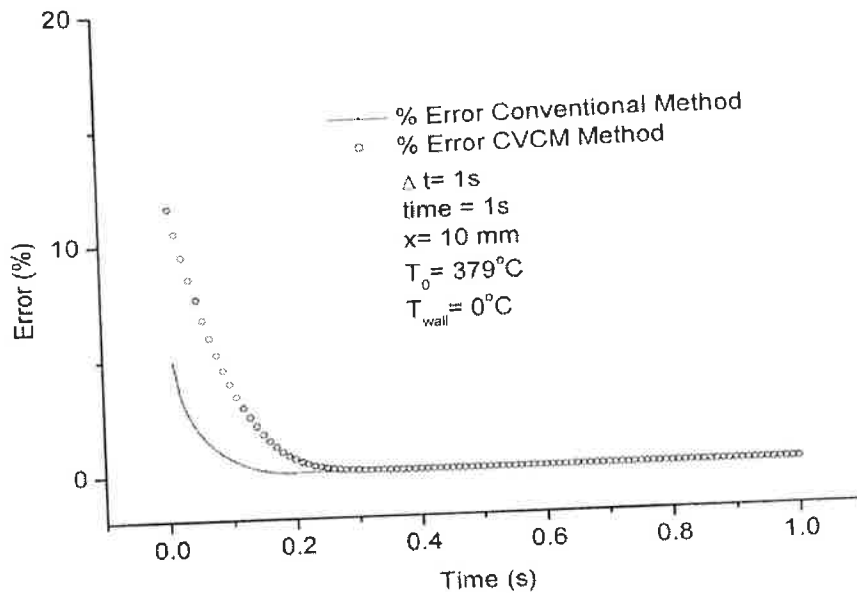


Figura 7.17 Muestra el porcentaje de error entre los dos Métodos el Convencional y el Modificado para una  $v = -1 \text{ mm/s}$ .

Posteriormente este porcentaje de error tiende a crecer cuando la velocidad se va incrementando como lo demuestra la Figura 7.18 donde se puede apreciar que existe un 10% de error entre ambos métodos cuando se aplico una  $v = 2 \text{ mm/s}$ .

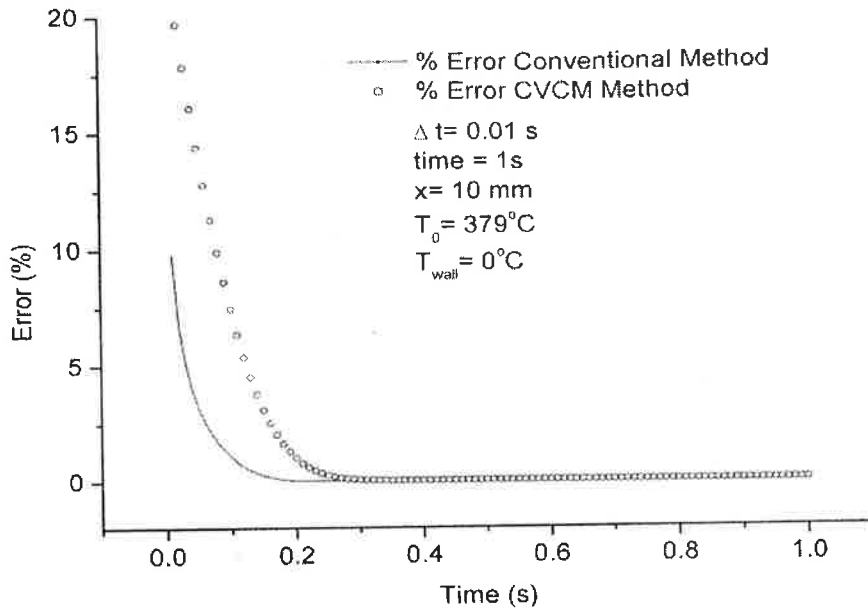


Figura 7.18 Muestra el porcentaje de error entre los dos Métodos el Convencional y el Modificado para una  $v = -2 \text{ mm/s}$ .

Como se comentó anteriormente que el porcentaje de error tiende a crecer conforme se va incrementando la velocidad esto se vuelve a confirmar en la Figura 7.19 donde se observa que existe un 15% de error entre ambos métodos cuando se aplico una  $v = 3 \text{ mm/s}$ . Esto nos dice que dicho porcentaje va a tender a subir en cuanto se valla incrementado la velocidad.

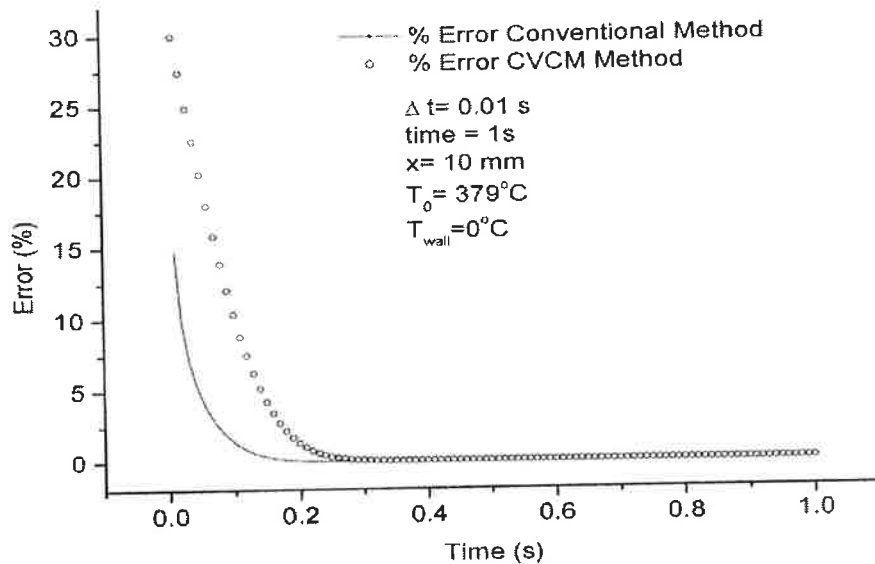


Figura 7.19 Muestra el porcentaje de error entre los dos Métodos el Convencional y el Modificado para una  $v = -3 \text{ mm/s}$ .

Se realizaron además algunas tablas como las que se describen a continuación, la Tabla 7.1 muestra la convergencia de los dos métodos para las velocidades tanto positivas como negativas mostradas en la misma.

La Tabla 7.2 muestra el tiempo que tardó cada uno de los dos métodos en converger evaluados en velocidades tanto positivas como negativas. La tabla 7.3 muestra el número de iteraciones que usaron cada uno de los dos métodos antes de converger dependiendo de la velocidad positiva o negativa aplicada. La tabla 7.4 muestra el porcentaje de error que presentan ambos métodos al evaluar la temperatura dependiendo de la velocidad positiva o negativa aplicada.

METODO	-100mm/s	-10mm/s	-5mm/s	0mm/s	5mm/s	10mm/s	100mm/s
Normal	SI	SI	SI	SI	NO	NO	NO
Modificado	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI

Tabla 7.1. Muestra cual de los dos Métodos convergió dependiendo de la velocidad aplicada.

METODO	-100mm/s	-10mm/s	-5mm/s	0mm/s	5mm/s	10mm/s	100mm/s
Normal	0.25	3.7813	1.3125	0.0781	-----	-----	-----
Modificado	0.50	0.4844	0.4844	0.4688	0.4844	0.50	0.4688

Tabla 7.2. Muestra cuanto tiempo en (s) se llevó cada uno de los Métodos en converger.

METODO	-100mm/s	-10mm/s	-5mm/s	0mm/s	5mm/s	10mm/s	100mm/s
Normal	12	558	172	3	----	----	----
Modificado	10	10	10	14	10	10	10

Tabla 7.3. Muestra el número de iteraciones que se tardo en converger dependiendo la velocidad aplicada.

METODO	-100mm/s	-10mm/s	-5mm/s	0mm/s	5mm/s	10mm/s	100mm/s
Normal	-7.7010	-56.11717	-25.3350	0.0706		-	
Modificado	-7.7010	-56.11717	-25.3350	0.0706	-113.58	-464.94	-6.66e17

Tabla 7.4. Muestra el error de temperatura que se presenta dependiendo la velocidad aplicada.

# *Capítulo Ocho*

## **CONCLUSIONES DEL MCVC-M**

---

En este trabajo se presentó un Método de Capacitancia de Volumen de Control Modificado (MCVC-M) para resolver problemas de transferencia de calor en simple fase. Este método se derivó de las ecuaciones de energía y transferencia de calor. Dichas ecuaciones se presentaron en forma integral para evitar singularidades. Para simplificar el problema se tomó como referencia el marco Euleriano. Una de las principales ventajas de este método es que las ecuaciones resultantes por discretización del elemento finito son similares a las ecuaciones de transferencia de calor por conducción pura, por lo que el sistema conserva la simetría en el conjunto de ecuaciones algebraicas y es fácil de implementar en un código estándar de elemento finito. Esta discretización se deriva directamente de la formulación clásica de Galerkin en su forma implícita, la cual presenta singularidades cuando se presentan velocidades muy grandes positivas. Para eliminar este problema, las ecuaciones de elemento finito fueron reformuladas, lo que deriva en un nuevo Método de Capacitancia de Volumen de Control. Las pruebas numéricas mostraron que la aproximación para el MCVC-M se convierte en un sistema bien condicionado para velocidades positivas.

Esta condición también se observa en las soluciones del MCVC-M las cuales están libres de problemas de inestabilidad. Además es una consecuencia de que la Capacitancia satisfaga la ecuación de conservación de la masa. Examinando las pruebas numéricas se observa que la aproximación conserva la precisión para altas velocidades positivas. También se observó que en muchas ocasiones los problemas de oscilaciones se deben a la manera en como está organizado el conjunto trabajado algebraicamente con las ecuaciones discretizadas. Con los resultados presentados en este trabajo se muestra que el método funciona bien para describir procesos en estado estable y transitorio. Una desventaja de otros esquemas clásicos como el esquema de Lax-Wendoff es que a altos números de Peclet y algunas combinaciones de parámetros de discretización se presentan inestabilidades numéricas. Para demostrar la viabilidad del método se realizaron varias pruebas con diferentes intervalos de velocidad, de la cual se deduce que el MCVC-M es sensible a la variación de este parámetro. Aun más, el MCVC-M mostró ser más preciso, y computacionalmente competitivo.

La formulación llamada aquí el Método de Capacitancia de Volumen de Control (MCVC) para la modelación de problemas de transferencia de calor convectivos-difusivos sobre un dominio semi-infinito en 1-D es discutida en este documento. Una nueva aproximación del volumen de control fundamental para explicar el transporte del material es presentada y la teoría que sostiene al MCVC-M es establecida.

El método posee las siguientes características:

1. Las predicciones de las temperaturas son consistentes con la ecuación de transferencia de calor de flujo transitorio.
2. Varios métodos semejantes tales como el esquema de diferencias centrales y la formulación upwind, son obtenidos libres de oscilaciones y con campos de temperatura precisos.
3. Los métodos semejantes son el esquema híbrido y la técnica de power law, el MCVC Modificado esta basado sobre ecuaciones diferenciales parciales para replicar el comportamiento físico de la difusión artificial, la cual puede ser incorporada fácil y virtualmente dentro de cualquier formulación numérica asegurándose que la energía sobre el dominio de un volumen de control se conserve.

4. El MCVC Modificado puede garantizar estabilidad una vez que las reglas básicas junto con la condición de estabilidad para velocidades positivas hayan sido satisfechas.



## REFERENCIAS

- [1] J. CRANK, *Free and Moving Boundary Problems*, Clarendon Press, Oxford, (1984).
- [2] V. R. VOLLER, M. CROSS, *Accurate solutions of moving boundary problems using the enthalpy method*, International Journal of Heat and Mass Transfer, **24**: 545-556, (1981).
- [3] V. R. VOLLER, M. CROSS *An explicit numerical method to track a moving phase front*, International Journal of Heat and Mass Transfer, **26**: 147-150, (1983).
- [4] V. R. VOLLER, *Fast implicit finite difference method for the analysis of phase change problems*, Numerical Heat Transfer, Part B, **17**: 155-155, (1990).
- [5] K. K. TAMMA, R.R NAMBURU, *Recent advances, trends and new perspectives via enthalpy based finite element formulations for applications to solidification problems*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, **30**: 803-820, (1990).
- [6] R. LEWIS, P.M ROBERTS, *Finite element simulation of solidification problems*. Applied Scientific Research, **44**: 61-92, (1987).
- [7] W. BUSHKO and I. R. GROSSE, *New finite element method for phase multidimensional change transfer problems*, Numerical Heat Transfer, Part B, **19**: 31-48, (1991).
- [8] S.R. RUNNELS, CAREY G.F. *Finite element simulation of phase change using capacitance methods*, Numerical Heat Transfer, Part B, **19**: 13-30, (1991).
- [9] S. BOUNDS, K. DAVEY and S. HINDUJA, *A Modified Effective Heat Capacitance Method for Solidification Modelling using Linear Tetrahedral Finite Elements*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, **39**: 3195-3215, (1996).
- [10] K. DAVEY, I. ROSINDALE, *Control Volume Capacitance method for Solidification Modelling*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, **46**: 315-340, (1999).
- [11] W.D. ROLPD, K.J. BATHE, *An efficient algorithm for analysis of non-linear heat transfer with phase changes*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, **18**: 119-134, (1982).
- [12] J. ROOSE, O. STORRER, *Modelization of phase changes by fictitious heat flow*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, **20**: 217-225, (1984).

- [13] Y. CHEN, Y. T. IM, Z. H. LEE, *Three dimensional finite element analysis with phase change by the temperature recovery method*, International Journal of Machine Tools Manufacture, **31**: 1–7, (1991).
- [14] V. R. VOLLER, C.R. SWAMINATHAN, B.G. THOMAS, **Fixed grid techniques for phase change problems: a review**, International Journal for Numerical Methods in Engineering, **30**: 875–898, (1990).
- [15] A. J. DALHUIJSEN, A. SEGAL, *Comparison of finite element techniques for solidification problems*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, **23**: 1807–1829, (1986).
- [16] R.H. GALLAGER, O.C. ZIENKIEWICZ, T.J. ODEN, M.M. CECHI, C. TAYLOR (Eds), *Finite Element in Fluids*, Vol. 3, Wiley, New York, (1978).
- [17] D. CHRISTIE, D. GRIFFITHS, A. MITCHELL, O.ZIENKIEWICZ, *Finite element methods for second order differential equation with significant first order derivatives*, International Journal for Numerical methods in Engineering **10**: 1389-1396, (1976).
- [18] R. H. GALLAGER, R. GLOWINSKI, P.M. GRESHO, J.T. ODEN, O.C. ZIENKIEWICZ, *Finite Element in Fluids*, Vol. 7, Wiley, New York, (1988).
- [19] J. C. HEINRICH, O. C. ZIENKEWICS, *Quadratic finite element methods for two dimensional convective-transport problems*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, **11**: 1831–1844, (1977).
- [20] K. H. HUBER, E.A. THORTON, T.G. BYROM, *The Finite Element Method for Engineering*, 3ra Edition Wiley, New York, (1995).
- [21] J. C. HEINRICH P. S.HUYAKORN, O. C ZIENKEWICS, and A. R. MITCHELL, **An Upwind Finite Element Scheme for two Dimensional Convective Transport Equation**, International Journal for Numerical Methods in Engineering, **11**: 131-143, (1977).
- [22] C. C. YU and J. C. HEINRICH, *Petrov-Galerkin methods for the time-dependent convective equation*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, **23**: 883–901, (1986).
- [23] O. C. ZIENKIEWICZ, R. L. TAYLOR, *The Finite Element Method*, 4ta Edition, Vol 1-2 McGraw Hill New York, (1991).
- [24] C. HIRSCH, *Numerical Computation of Internal and External Flow*, vol. 1, J. Wiley, 1988, vol 2, (1990).
- [25] G. COMMINI, C. NONINO, S. DEL GIUDICE, *Finite element modelling of coupled convection-conduction phase change*, in B. Sunden, M. Faghri (Eds.), *Modelling of Engineering Heat Transfer Phenomena*, Vol. 2; 145-173, (1999).

- [26] S. KOBAYASHI, S.OH, T. ALTAN, *Metal Forming and The Finite Element Method*, Oxford University Press, New York, (1989).
- [27] H. LIPPMANN, *Metal Forming Plasticity*, Springer Berlin, (1979).
- [28] K. DAVEY, N.J.RODRIGUEZ, *A Control Volume Capacitance Method for Solidification Modelling with mass transport*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, **53**: 2643–2671, (2002).
- [29] N. J. RODRIGUEZ, *Energy and Mass Transport in Solidification Modelling with the Finite Element Method*, PhD Thesis, Aerospace, Manufacturing and Mech. Eng. Department, UMIST, UK (2001).
- [30] XU HY, MD. MATOVIC, A POLLARD, *Finite Difference Schemes for Three-Dimensional Time-Dependent convection-Diffusion Equations Using Global Discretization*, Journal of Computational Physics; **130**: 109-122, (1997).
- [31] I. YAVNEH, *Analysis of a Fourth-Order Compact Scheme for Convective-Diffusion*, Journal of Computational Physics **133**: 361-364, (1997).
- [32] CP CHEN, CY TSAO, *Semi-solid deformation of A356 Al alloys*, In Proceedings of the Fourth International Conference on the Processing of Semi-Solid Alloys and Composites, Kirkwood DH, Kapranos P (eds). The University of Sheffield: England, 16-20, (1996).
- [33] K. DAVEY, N.J.RODRIGUEZ, *Solidification Modelling with a Control Volume Method on Domains Subjected to Visco - plastic Deformation*, Applied Mathematics Modelling, (2001) in press.
- [34] F. BREZZI, M. O. BRISTEAU, L. P. FRANCA, M. MALLETT and G. RÓGE, *A relationship between stabilized finite element methods and the Galerkin method with bubble function*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, **96**: 117–129, (1992).
- [35] M. SARDELLA, *On a coupled Finite Element-Finite Element Volume Method for Convection-Diffusion Problems*, International Journal of Numerical Analysis **20**: 281-301, (2000).
- [36] H.G. ROOS, M. STYNES, and L. TOBISKA, *Numerical Methods for Singularly Perturbed Differential Equations*, Springer, Berlin, (1996).
- [37] E. WNEDLAND and G. SCHMID, *A Symmetrical Streamline Stabilization Scheme for High advective Transport*, International Journal for Analytical Methods in Geomechanics, **24**: 29-45, (2000).
- [38] MEHDI DEGHAN, *Weighted finite difference techniques for the one-dimensional advection-diffusion equation*, Applied Mathematics and Computation, **147**: 307-319, (2004).

- [39] FINLAYSON, B. A., *The Method of Weighted Residuals and Variational Principles*, Academic, New York, (1972).
- [40] H. S. CARSLAW and J. C. JAEGER, *Conduction of Heat in Solids*, Oxford Science Publications, Clarendon Press, Second Edition, (1992).
- [41] J. A. MACKENZIE and K. W. MORTON, *Finite Volume Solutions of Convection-Diffusion Test Problems*, Mathematics of Computation, Number 201, **60**: 189-220, January (1992).
- [42] J. A. MACKENZIE and M. L. ROBERTSON, *The numerical solution of one-dimensional phase change problems using an adaptive moving mesh method*, Journal of Computational Physics, **161**: 537-557, (2000).
- [43] SUHAS V. PATANKAR, *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, Hemisphere Publishing Corporation, (1980).
- [44] T. F. CHAN, *Stability Analysis of Finite Difference Schemes for the Advection-Diffusion Equation*, SIAM, International Journal of Numerical Analysis, **21**:272-283, (1984).
- [45] A. C. HINAMARSH, P.M GRESHO, D.F. GRIFFITHS, *The Stability of Explicit Euler time Integration for Certain Finite Difference Approximation of the Multidimensional Advection-Diffusion Equations*, International Journal for Numerical Methods in Fluids, **4**:853-897, (1984).
- [46] J. SIERNIENICH. I. GRADWELL, *Analysis of Explicit Difference Methods for the Diffusion-Convection Equation*, International Journal for Numerical Methods in Engineering **12**: 899-916, (1978).
- [47] A. RIGAL, *High Order Difference Schemes for unsteady one dimensional Diffusion-Convection Problem*, Journal of Computational Physics, **114**: 59-76, (1994).
- [48] A. RIGAL, *Stability Analysis of Finite Differences Schemes for Two-Dimensional Advection-Diffusion Problems*, International Journal for Numerical Methods in Fluids, **13**:579-597, (1991).
- [49] J. D. LAMBERT, *Numerical Methods for Ordinary Differential Systems, The Initial Value Problems*, Wiley, New York, (1991).
- [50] D. F. GRIFFITHS, L. CHRISTIE, A.R. MITCHELL, *Analysis of Error Growth for Explicit Difference Schemes in Diffusion-Convection problems*, International Journal for Numerical Methods in Engineering **15**: 1075-1081, (1984).
- [51] K. N. MORTON, *Stability of Finite Difference Approximations to a Diffusion-Convection Equation*, International Journal for Numerical Methods in Engineering **15**: 677-683, (1980).

- [52] LL. N. TREFETHEN, *Pseudospectra of Linear Operators*, SIAM Review, 39(3): 383-406, (1997).
- [53] LL. N. TREFETHEN, *Group Velocity Interpretation of the Stability Theory of Gustafson Kreiss and Sundstrom*, Journal of Computational Physics 49: 199-217; (1983).
- [54] D. W. KELLY, S.NAKASAWA, O. C. IENKIEWICZ, J.C. HEINRICH, *A note on upwind and anisotropic balancing dissipation in finite element approximation to convective diffusion problems*, Int. J. Numer. Methods Engrg. 15 (1980) 1705-1711.
- [55] A. N. BROOKS, T.J.R. HUGHES, *Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulation for convectiondominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier – Stokes equations*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg 32 (1982) 199-259.
- [56] T. J. R. HUGHES, T. E. TEZDUYAR, *Finite element method for first order hyperbolic systems with particular emphasis on the compressible Euler equations*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 45 (1984) 217–284.
- [57] T. J. R. HUGHES, M. MALLET, *A new finite element formulations for computational fluid dynamics: III. The generalized streamline operator for multidimensional advective–diffusive systems*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 58 (1986) 305–328.
- [58] R. CODINA, E. OÑATE, M. CERVERA, *The intrinsic time for the streamline-upwind Petrov–Galerkin formulation using quadratic elements*, Int. J. Numer. Methods Engrg. 94 (1992) 239–262.
- [59] R. CODINA, *A finite element formulation for the numerical solution of the convection–diffusion equations*, Monograph no. 14, CIMNE Barcelona, 1993.
- [60] J. DONEA, *A Taylor–Galerkin method for convective transport problems*, Int. J. Numer. Methods Engrg. 20 (1984) 101–119.
- [61] J. DONEA, A. HUERTA, *Finite Element Methods for Flow Problems*, J. Wiley, 2003.
- [62] J. DONEA, T. BELYTSCHKO, P. SMOLINSKI, *A generalized Galerkin method for steady state convection–diffusion problems with applications to quadratic shape functions elements*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 48 (1985) 25–43.
- [63] M. B. GOLDSCHMIT, E.N. DVORKIN, *On the solution of the steady state convection–diffusion equation using quadratic elements*. A generalized Galerkin technique also reliable with distorted meshes, Engrg. Comput. 11 (6) (1994) 565–579.

- [64] T. J. R. HUGHES, L.P. FRANCA, G.M. HULBERT, *A new finite element formulation for computational fluid dynamics: VIII. The Galerkin/ least-squares method for advective-diffusive equations*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 73 (1989) 173-189.
- [65] L. P. FRANCA, S.L. FREY, T.J.R. HUGHES, *Stabilized finite element methods: I. Application to the advective-diffusive model*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 95 (1992) 253-276.
- [66] L. P. FRANCA, E.G. DUTRA DO CARMO, *The Galerkin Gradient Least Square method*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 74 (1989) 41-54.
- [67] J. DOUGLAS, T.F. RUSSELL, *Numerical methods for convection dominated diffusion problems based on combining the method of characteristics with finite element or finite difference procedures*, SIAM J. Numer. Anal. ,19 (1982) 871.
- [68] R. LOHNER, K. MORGAN, O.C. ZIENKIEWICZ, *The solution of non-linear hyperbolic equation systems by the finite element method*, Int. J. Numer. Methods Fluids 4 (1984), 1043.
- [69] O. C. ZIENKIEWICZ, R. CODINA, *A general algorithm for compressible and incompressible flow. Part I: The split characteristic based scheme*, Int. J. Numer. Methods Fluids 20 (1995) 869-885.
- [70] T. J. R. HUGHES, *Multiscale phenomena: Green functions, subgrid scale models, bubbles and the origins of stabilized methods*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 127 (1995) 387-401.
- [71] F. BREZZI, L.P. FRANCA, T.J.R. HUGHES, A. RUSSO,  $b = \int_g$ , Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 145 (1997) 329-339.
- [72] R. CODINA, *Stabilization of incompressibility and convection through orthogonal sub-scales in finite element method*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 190 (2000) 1579-1599.
- [73] G. HAUKE, *A simple subgrid scale stabilized method for the advection-diffusion-reaction equation*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 191 (2002) 2925-2948.
- [74] F. BREZZI, A. RUSSO, *Choosing bubbles for advection-diffusion problems*, Math. Models Methods Appl. Sci. 4 (1994) 571- 587.
- [75] C. FARHAT, I. HARARI, L.P. FRANCA, *The discontinuous enrichment method*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 190 (2001) 6455- 6479.
- [76] F. ILINCA, J.F. HE'TU, D. PELLETIER, *On stabilized finite element formulation for incompressible advective-diffusive transport and fluid flow problems*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 188 (2000) 235-257.

- [77] T. E. TEZDUYAR, Y. OSAWA, *Finite element stabilization parameters computed from element matrices and vectors*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 190 (2000) 411–430.
- [78] T. E. TEZDUYAR, *Adaptive determination of the finite element stabilization parameters*, in: Proceedings of the ECCOMAS Computational Fluid Dynamics Conference 2001 (CD-ROM), Swansea, Wales, United Kingdom, 2001.
- [79] I. HARARI, L.P. FRANCA, S.P. OLIVEIRA, *Streamline design of stability parameters for advection–diffusion problems*, J. Comput. Phys. 171 (2001) 115–131.
- [80] A. NESLITURK, I. HARARI, *The nearly-optimal Petrov–Galerkin method for convection–diffusion problems*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 192 (2003) 2501–2519.
- [81] T. E. TEZDUYAR, *Computation of moving boundaries and stabilization parameters*, Int. J. Numer. Methods Fluids 43 (2003) 555–575.
- [82] T. J. R. HUGHES, M. MALLET, *A new finite element formulations for computational fluid dynamics: IV.A discontinuity capturing operator for multidimensional advective–diffusive system*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 58 (1986) 329–336.
- [83] R. CODINA, *A discontinuity-capturing crosswind dissipation for the finite element solution of the convection–diffusion equation*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 110 (1993) 325–342.
- [84] T. J. R. HUGHES, M. MALLET, A. MIZUKAMI, *A new finite element formulation for computational fluid dynamics: II Beyond SUPG*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 54 (1986) 341–355.
- [85] A. C. GALEAO, E.G. DUTRA DO CARMO, *A consistent approximate upwind Petrov–Galerkin method for convection-dominated problems*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 68 (1988) 83–95.
- [86] T. E. TEZDUYAR, Y.J. PARK, *Discontinuity-capturing finite element formulations for nonlinear convection–diffusion–reaction equations*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 59 (1986) 307–325.
- [87] E. OÑATE, *Derivation of stabilized equations for advective–diffusive transport and fluid flow problems*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 151 (1–2) (1998) 233–267.
- [88] E. OÑATE, *Possibilities of finite calculus in computational mechanics*, Int. J. Numer. Methods Engrg. 60 (2004) 255–281.
- [89] E. OÑATE, M. MANZAN, *Stabilization techniques for finite element analysis of convection diffusion problems*, in: G. Comini, B. Sunden (Eds.), Comput. Analysis of Heat Transfer, WIT Press, 2000.

- [90] E. OÑATE, J. GARCÍA, S.R. IDELSOHN, *Computation of the stabilization parameter for the finite element solution of advective–diffusive problems*, Int. J. Numer. Methods Fluids 25 (1997) 1385–1407.
- [91] E. OÑATE, M. MANZAN, *A general procedure for deriving stabilized space–time finite element methods for advective–diffusive problems*, Int. J. Numer. Methods Fluids 31 (1999) 203–221.
- [92] C.A. FELIPPA, E. OÑATE, *Nodally exact Ritz discretization of 1D diffusion–absorption and Helmholtz equations by variational FIC and modified equation methods*, Research Report No. PI 237, CIMNE, Barcelona, Comput. Mech., in press.
- [93] E. OÑATE, J. MIQUEL, G. HAUKE, *Stabilized formulation for the 1D advection–diffusion–absorption equation using finite calculus and the finite element method*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., in press.
- [94] E. OÑATE, *A stabilized finite element method for incompressible viscous flows using a finite increment calculus formulation*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 182 (1–2) (2000) 355–370.
- [95] E. OÑATE, J. GARCÍA, *A finite element method for fluid–structure interaction with surface waves using a finite calculus formulation*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 191 (6–7) (2001) 635–660.
- [96] J. GARCÍA, E. OÑATE, *An unstructured finite element solver for ship hydrodynamic problems*, J. Appl. Mech. 70 (2003) 18–26.
- [97] E. OÑATE, J. GARCÍA, S. R. IDELSOHN, *Ship hydrodynamics*, in: T. Hughes, R. de Borst, E. Stein (Eds.), Encyclopedia of Computational Mechanics, J. Wiley, 2004.
- [98] E. OÑATE, R. L. TAYLOR, O.C. ZIENKIEWICZ, J. ROJEK, *A residual correction method based on finite calculus*, Engrg. Comput. 20 (5/6) (2003) 629–658.
- [99] E. OÑATE, J. ROJEK, R. L. TAYLOR, O.C. ZIENKIEWICZ, *Finite calculus formulation for analysis of incompressible solids using linear triangles and tetrahedra*, Int. J. Numer. Methods Engrg. 59 (11) (2004) 1473–1500.
- [100] T. J. R. HUGHES, A. N. BROOKS, *A multi-dimensional upwind scheme with no crosswind diffusion*, in: T.J.R. Hughes (Ed.), Finite Element Methods for Convection Dominated Flows, AMD-vol. 34, ASME, New York, 1979, pp. 19–35.
- [101] T. E. TEZDUYAR, T. J. R. HUGHES, *Development of time-accurate finite element techniques for first-order hyperbolic systems with particular emphasis on the compressible Euler equations*, NASA Technical Report NASA-CR-204772, NASA, 1982.
- [102] T.E. TEZDUYAR, M. SENGA, *Stabilization and shock parameters in SUPG formulation of compressible flows*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 195 (2006) 1621–1632.



- [103] P. V. BRADY, C. M. BETHKE, *Beyond the  $K_d$  Approach Ground Water*, 38(3): 321-322, (2000).
- [104] W. HACKBUSCH, *Multi-grid Methods and Applications*, Springer Berlin, (1985).
- [105] J. XU, *Interactive methods by Space Decomposition and Subspace Correction*, SIAM, Review 34:581-613, (1992)
- [106] G. T. YEH, *A Lagrangian-Eulerian Method with Zoom able Hidden fine mesh Approach to Solving Advection-Dispersion Equations*, Water Resources Research 26: 1133-1144, (1990).
- [107] H. P. CHEN, J. R. CHENG, G.T. YEH, *A Lagrangian-Eulerian Method with Adaptively local Zooming Approach to Solve Three Dimensional Advection-Diffusion transport Equations*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 41: 587-915, (1998).
- [108] A. M. BAPTISTA, *Solution of advection-dominated transport by Eulerian-Lagrangian methods using the backwards method of characteristics*, Ph. D. Thesis, The Massachusetts Institute of Technology, U.S.A ., (1987).
- [109] J. R. CHENG, H.P. CHEN, G.T. YEH, *A Lagrangian-Eulerian Method with Adaptively local Zooming and Peak/valley Capturing Approach to Solve two Dimensional Advection-Diffusion transport Equations*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 39: 987-1016, (1996).
- [110] V. R. VOLLER, M. CROSS, *Applications of control volume enthalpy methods in the solutions of Stefan problems*, Computational Techniques in Heat Transfer, ed. R. W, LEWIS. Pine ridge Press, Swansea, pp 245-276, (1985).
- [111] M. SALCUDEAN, AND Z. ABDULLAH, *On the numerical modelling of heat transfer during solidification processes*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 25: 445-473, (1988).
- [112] W. KURZ AND D.J. FISHER, *Fundamentals of Solidification*, Trans-Tech., Switzerland, (1986).
- [113] GEORGE R. BUCHANAN, *Finite Element Analysis*, Schaum's Outline Series, McGraw-HILL, (1995).
- [114] M. N. OZISIK, *Heat Conduction*, Wiley Inter science, New York, (1980).
- [115] S.KAKAC AND Y. YENER, *Heat Conduction*, Hemisphere Publishing, New York, (1985).
- [116] D. POULIKAKOS, *Conduction Heat Transfer*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, (1994).

- [117] G. BEER, J. O. WATSON, *Introduction to Finite and Boundary Element Methods for Engineering*, John Wiley and Sons, Chichester, (1992).
- [118] J. DONEA, P. FASOLI-STELLA, S.GUILLIANI, *Lagrangian and Eulerian Finite Element Techniques for Transient Fluids Structure Interaction Problem's*, in: Trans. 4<sup>th</sup> Int. Conf. On SMIRT, vol. B., pp 1-12, (1997).
- [119] W. K. LIU, T. BELYTSCHKO, H. CHANG, *An Arbitrary Lagrangian-Eulerian Finite Element Method for Path Dependent Materials*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, **58**: 227-245, (1986).
- [120] H.H. KING, *A Poisson Equations Solver for Rectangule or Annular regions*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, **10**: 779, (1976).
- [121] RANDALL J. LEVEQUE, *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*, Cambridge Texts in Applied Mathematics, (2002).

# NOMENCLATURA

---

SÍMBOLOS INGLESES		Inglés	SI
$A$	Contribución homogénea	ft <sup>2</sup>	m <sup>2</sup>
$[A]$	Matriz de Coeficientes	Sin unidades	
$\{B\}$	Vector Columna	Sin unidades	
$B$	Contribución homogénea	Sin unidades	
$b$	Eficiencia volumétrica de la Generación de calor		
$cp$	Calor específico a presión constante	Btu/lb <sub>m</sub>	J/kgK
$c$	Capacitancia	Btu/lb <sub>m</sub>	J/kgK
$C$	Matriz de capacitancia	Sin unidades	
$D$	Es la conductancia de la difusión		
$d$	Contribución no homogénea		
$e$	Potencia emisiva	Btu/h-ft <sup>2</sup>	W/m <sup>2</sup>
$E_{div}$	Fuente relacionada a la divergencia		
$E$	punto de la malla	Sin unidades	
$f$	Numero de caras de un elemento arbitrario	Sin unidades	

$F$	Esfuerzo de convección		
$g$	Función conocida	Sin unidades	
$G$	Contribución homogénea		
$h$	Entalpía específica	Btu /ft <sup>2</sup> °F	W /mm <sup>2</sup> °C
$\bar{h}$	Entalpía volumétrica	Btu /ft <sup>2</sup> °F	W /mm <sup>2</sup> °C
$h_{sol}$	Entalpía del sólido	Btu /ft <sup>2</sup> °F	W /mm <sup>2</sup> °C
$h_{\infty}$	Coefficiente de transferencia de calor	Btu/h-ft <sup>2</sup> °F	W/m <sup>2</sup> K
$H$	Matriz de rigidez	Sin unidades	
$i$	Numero de cara	Sin unidades	
$j$	Elemento		
$J$	Contribución homogénea		
$k$	Conductividad térmica	Btu/h-ft °F	W/mK
$K$	Matriz de Conductancia	Sin unidades	
$\bar{K}$	Suma de las contribuciones homogéneas	Sin unidades	
$L_c$	Longitud característica	ft	m
$M_e^n$	Es la masa del volumen de control $e$ en un tiempo $n$	ft /seg	m /seg
$M^i$	Masa del material	lb <sub>m</sub>	kg.
$m$	Masa	lb <sub>m</sub>	kg
$\dot{m}$	Razón de flujo de masa	lb <sub>m</sub> /s	kg/s
$n$	Vector normal unitario a la superficie $S$	Sin unidades	
$N_i$	Función de forma	Sin unidades	
$Pe$	Numero de Peclet $c_p \rho u_{\infty} L_c / k$	Sin unidades	
$P$	Punto de la malla	Sin unidades	
$Pot$	Potencia de trabajo	ft lb <sub>f</sub> /s	J/s
$p$	Contribución no homogénea	Sin unidades	
$q$	Razón de flujo de calor	Btu/h	W
$q''$	Componente normal del flujo de calor en la frontera externa	Btu/h	W
$q$	Razón de flujo de calor por unidad de área o flujo de calor unitario	Btu/h-ft <sup>2</sup>	W/m <sup>2</sup>

$\dot{q}$	Razón de generación interna de calor por unidad de volumen	Btu/h-ft <sup>3</sup>	W/m <sup>3</sup>
$\hat{q}''$	Representación aproximada del flujo de calor específico	Btu/h-ft <sup>3</sup>	W/m <sup>3</sup>
$S$	Frontera de la superficie	ft	m
$\bar{s}$	Suma de las contribuciones no homogéneas	Sin unidades	
$\dot{s}$	Razón volumétrica de la fuente	ft <sup>3</sup> /seg	m <sup>3</sup> /seg
$T$	Temperatura	°F, °R	°C, °K
$\hat{T}$	Aproximación a la temperatura	Sin unidades	
$t$	Tiempo	seg	seg
$\{T\}$	Vector columna de temperaturas	°F	°C
$T_w$	Temperatura del fluido	° F	° C
$V_e$	Volumen del elemento	ft <sup>3</sup>	m <sup>3</sup>
$W_i$	Función ponderada	Sin unidades	
$W$	Punto de la malla	Sin unidades	
$v$	Velocidad del material	ft /seg	m/seg
$v^*$	Velocidad del Volumen de Control	ft /seg	m/seg
$x$	Dirección de la coordenada	ft	m
$y$	Dirección de la coordenada	ft	m
$z$	Dirección de la coordenada	ft	m

## SÍMBOLOS GRIEGOS

$\Phi$	Variable independiente del fluido	Sin unidades	
$\theta$	Factor de sobre peso entre 0 y 1	Sin unidades	
$\alpha$	Coefficiente de difusión térmica	ft <sup>2</sup> /h	m <sup>2</sup> /seg
$\vartheta$	Función de disipación	Sin unidades	
$\varepsilon$	Error	Por ciento (%)	
$\Delta L$	Es la variación de longitud	ft	m
$\mu$	Viscosidad	lb <sub>m</sub> /ft-hr	kg/m-s

$\nu$	Viscosidad cinemática	ft <sup>2</sup> /h	m <sup>2</sup> /mseg
$\rho$	Densidad del material	lbm/ ft <sup>3</sup>	kg/m <sup>3</sup>
$\sigma$	Constante de Stefan-Boltzmann	Btu/h- ft <sup>2</sup> °R <sup>4</sup>	W/m <sup>2</sup> K <sup>4</sup>
$\Lambda$	Rapidez de trabajo viscoso por unidad de volumen		
$\Delta x$	Incrementos en x	ft	m
$\phi$	Vector nodal de desplazamiento	Sin unidades	
$\hat{\phi}$	Solución aproximada	Sin unidades	
$\varphi$	Velocidad de los componentes	ft /seg	m/seg
$\gamma$	Propiedad especifica de la densidad	lb <sub>m</sub> /in <sup>3</sup>	kg /m <sup>3</sup>
$\beta$	Propiedad especifica	Sin unidades	
$\delta_x$	Desplazamientos en dirección de x	ft	m
$\Gamma$	Propiedad especifica de la viscosidad		
$\Omega$	Dominio	Sin unidades	
$\Omega_e$	Dominio de un elemento	Sin unidades	

## SUBÍNDICES

Promedio	promedio
<i>Cond</i>	conducción
<i>Conv</i>	convección

## ABREVIATURAS

ALE	Aproximación Lagrangiana-Euleriana
BG	Bubnov Galerkin
CN	Crank Nicholson
CPU	Unidad de Procesamiento Central
DFA	Formula de Diferencias hacia atrás
DG	Discontinuidad Galerkin
DF	Diferencias Finitas
EA	Euler Hacia Atrás
EDPA	Ecuación Diferencial Parcial Alternativa
EF	Elemento Finito

FIC	Calculo Finito
MEF	Método del Elemento Finito
MCVC	Método de Capacitancia de Volumen de Control
MCVC-M	Método de Capacitancia de Volumen de Control Modificado
ODE	Ecuación Diferencial Ordinaria
PDE	Ecuación Diferencial Parcial
SUPG	Método Upwind Petrov-Galerkin
VC	Volumen de Control