



CENTRO DE INGENIERIA Y DESARROLLO INDUSTRIAL

CIDESI

## Proyecto Industrial Terminal

**Análisis de la Cinemática y  
Dinámica de un Robot de 5 GDL**

**PARA OBTENER LA ESPECIALIDAD EN  
“TECNOLOGO EN MECATRONICA”**

**PRESENTA**

Alumno: SINHUÉ MOISÉS G. GONZÁLEZ

Tutor de Planta: Dr. LUIS GOVINDA GARCÍA

Tutor Académico: Dr. LUIS GOVINDA GARCÍA

QUERÉTARO, QRO. 2009

005970



## **Contenido**

1.- RESUMEN.....	2
2.- ANTECEDENTES .....	3
Estado del Arte .....	3
Análisis.....	5
3.- DEFINICIÓN DEL TEMA .....	7
4.- JUSTIFICACIÓN .....	7
5.- OBJETIVOS .....	8
Objetivo General .....	8
Objetivos específicos.....	8
6.- FUNDAMENTOS.....	9
Clasificación.....	9
Cinemática directa .....	15
Obtención de los parámetros de Denavit-Hartemberg. ....	17
Cinemática Inversa .....	24
Jacobiano .....	25
El efecto Coriolis. ....	26
7.- PROCEDIMIENTO.....	27
Obtención de los parámetros de Denavit-Hartenberg.....	27
Obtención de las matrices de transformación de los eslabones. ....	29
Matriz de transformación homogénea. ....	30
Cinemática directa .....	31
Cinemática inversa .....	32
Cálculo de las velocidades angulares. ....	32
Posición respecto al marco base de cada una de las articulaciones. ....	33

Cálculo del Jacobiano .....	33
Calculando las velocidades angulares .....	34
Cálculo de las matrices de inercia.....	34
Cálculos para la matriz de inercia M.....	35
Cálculos para el vector de Coriolis V.....	36
Cálculo del vector de gravedad G,.....	37
Parámetros del CAD.....	38
Comprobación del modelo.....	44
<b>8.- CONCLUSIONES.....</b>	<b>46</b>
<b>9.- BIOGRAFIA.....</b>	<b>46</b>
<b>10.- ANEXO .....</b>	<b>47</b>
Desarrollo matemático del modelo.....	47
Programas en matlab .....	67

## **1.- RESUMEN**

El mantenimiento preventivo de las líneas de alto voltaje es una tarea que ha estado recibiendo más atención recientemente. La energía eléctrica es a menudo subvalorada por la mayoría de la gente, considerando su abundancia en áreas urbanas. Sin embargo, su carencia, incluso si es temporal, puede causar problemas innumerables, como es evidente durante apagones en algunos grandes urbes en años recientes.

La tarea de inspeccionar líneas de alto voltaje no es sencillo, y requiere que las personas caminen sobre ellos, suspendidos varios metros encima de la tierra, a veces en lugares remotos como montañas o bosques o que las líneas de alto voltaje sean inspeccionados por personas abordos de helicópteros. Para hacer esta tarea más segura, se está desarrollando un robot que sea capaz de evadir los obstáculos que se presentan a través de la línea como esferas, fusibles y torres.

Se trata del cálculo de la obtención la matriz de datos de los parámetros de Denavit-Hartenberg, obtenidos al posicionar los ejes de referencia de cada uno de los eslabones del manipulador, para después obtener las matrices de transformación que nos relacionan

con respecto a un sistema de ejes referencia inercial y así obtener las ecuaciones del movimiento del manipulador

## **2.- ANTECEDENTES**

En la literatura mundial existe una gran cantidad de esquemas de control para robots móviles (terrestres, submarinos, aéreos; autónomos y no-autónomos), robots artrópodos y manipuladores móviles, por mencionar algunos ejemplos. Sin embargo, hay muy pocos trabajos que abordan sistemas robotizados para la inspección de líneas como el que se pretende desarrollar en este proyecto. Del universo de trabajos encontrados, son pocos los que abordan con detalle el control de movimiento del sistema robótico en cuestión. A continuación se presenta el estado del arte y de la técnica del presente módulo, así como, su respectivo análisis, resaltando aquellos puntos que sean de interés para resolver el problema planteado.

### **Estado del Arte**

Rocha y Sequeira Ref. 01 proponen el diseño conceptual de un robot capaz de desplazarse y evadir obstáculos en una línea de transmisión. El diseño es simple, cuando el robot se desplaza sobre el cable representa el movimiento del gusano de la col. Cuando el robot evade un obstáculo puede ser analizado como una cadena cinemática serial de 2 gdl (grados de libertad) cuyo extremo libre sigue una trayectoria predefinida para evadir el obstáculo. Lo anterior, se logra utilizando un control basado en modelo (dinámica inversa+I) con acción integral para darle robustez al sistema ante perturbaciones.

Campos et al. Ref. 02 proponen un robot semi-autónomo capaz de instalar y remover esferas de señalización en las líneas de transmisión. El artículo se centra en la estrategia utilizada para la operación del robot, dividida en tres tareas básicas: 1) movimiento en el cable, 2) instalación de las esferas, y 3) desinstalación de las esferas. La primera tarea consiste en teleoperar al robot desde tierra, en tanto que las dos últimas son automáticas.

En Ref. 03, Tang et al. proponen un sistema experto basado en CLIPS (C Language Integrated Production System) capaz de proveer autonomía al robot inspector. Dicho sistema procesa información en tiempo real proveniente de diversos módulos, toma y ejecuta decisiones vitales del robot, tales como la evasión de obstáculos.

Nayerloo et al. Ref. 04, presentan un robot inspector de líneas con tres brazos retráctiles (sujetos al cable) y una barra común a ellos por la cual se pueden desplazar. Los autores

proponen el uso de Mechanical Desktop (CAD del robot) y de ADAMS para simular los movimientos del robot (cinemática y dinámica).

Tang et al. en Ref. 05, describen la configuración mecánica y funcional de un robot. En lo que respecta al control, sólo se menciona que una tarjeta de adquisición de datos, basada en el bus PC/104, es la encargada del control de los motores de tracción y de sujeción, a fin de avanzar, retroceder, parar y evadir obstáculos. Reiteran el uso de CLIPS en conjunto con C para crear un Sistema Experto Distribuido (DES, siglas en inglés) que sea capaz de calcular las trayectorias que garanticen la evasión del obstáculo.

Zhou et al. Ref. 06 presentan un esquema de control similar al dado en Ref. 05. El sistema experto propuesto está basado en CLIPS, C y Visual C++. Cuando el robot evade los obstáculos, dos sistemas expertos trabajan coordinadamente.

Montambault y Pouliot Ref. 07, investigadores de Hydro-Québec, presentan el diseño geométrico de su robot inspector de líneas más reciente. Lo más relevante de este artículo, y que compete al presente módulo, es la determinación de los autores de implementar el modo de teleoperación. Los autores señalan que es más conveniente el modo de teleoperación desde la estación terrestre que dotar de autonomía al robot, ya que actualmente el robot se encuentra en fase de experimentación en campo. No descartan dotar al robot de autonomía en un futuro.

En este trabajo Ref. 08, Montambault y Pouliot presentan una mayor descripción de la estrategia de control utilizada en su robot. Básicamente, el robot es teleoperado (unilateralmente) desde la estación terrestre por un experto liniero. El liniero manipula dos joysticks cuyos comandos de velocidad son enviados, vía radio frecuencia, hacia el robot en las alturas, haciendo uso de su conocimiento en la conformación y comportamiento de las líneas eléctricas y auxiliándose de imágenes desplegadas en una interfaz gráfica de usuario. En lo que respecta al control de bajo nivel, el control es muy simple, siendo de velocidad en algunas ocasiones, y en otras, monitoreando los picos de corriente generados cuando las extremidades llegan a su límite mecánico, dicho de otra manera, cuando éstas colisionan. No se describe qué tipo de control de velocidad es utilizado.

Li Cai et al. Ref. 09, proponen una estructura de control jerarquizada de tres niveles. La estructura de control es muy intuitiva y fácil de entender. Consta de 2 modos de operación, el primero llamado modo normal y el segundo llamado modo de evasión de obstáculos. En el modo de operación normal, el robot se desplaza a lo largo de la línea, posiciona la caja que contiene la electrónica entre los dos brazos del robot.

En el modo de operación de evasión de obstáculos, se tienen 3 tareas básicas: 1) Close to target, 2) Action of rear arm, 3) Action of fore arm. A su vez, la tarea Close to target, se divide en dos subtareas slow down y stop. Del mismo modo, la tarea Action of rear arm consiste de 6 subtareas:

Regulate counterweight box,

Rear arm out of line,

Promote robot,

Turn robot,

Rotate for arm,

Fore arm in lin.

De manera similar, la tarea Action of fore arm se divide en 6 subtareas, tal y como se muestra en la figura 2 (ver Resumen Técnico de Referencia 9). Lo interesante del artículo y relevante para este módulo, es que en cada subtarea entra en acción un control fuzzy (implícito en las subtareas de la figura 2, 2) que garantiza el seguimiento de las trayectorias generadas.

## Análisis

El análisis de las referencias revisadas se resume en la tabla 1.

Ref	Teleoperado: T Autónomo: A	Modelado matemático	Simulación: S Experimentos: E	Leyes de control (bajo nivel)	Estructura de control
01	--	Dinámica de un robot de 2 gdl.	S  Aunque no se menciona el software utilizado	Dinámica inversa con acción integral	--
02	T/A.	--	E  Funcionando en campo	--	Teleoperado en el acercamiento y alejamiento de la esfera.  Autónomo en la instalación y/o

					desinstalación de la esfera
03	A	Cinemática directa de los brazos del robot.	S Diseño conceptual. No se menciona software utilizado	--	Sistema experto basado en CLIPS y C.
04	T  Manipulado a través de la Interfaz Gráfica de Usuario.  Comunicación alámbrica.	--	S/E  Utilizan ADAMS.  Funcionando en laboratorio	--	--
05	T/A  Eventualmente, puede ser teleoperado para solventar imprevistos	--	S Diseño conceptual. No se menciona software utilizado	--	Sistema experto distribuido basado en CLIPS
06	A	--	E Funcionando en laboratorio	--	Sistema experto distribuido basado en CLIPS y Visual C++
07	T	--	E Funcionando en campo	Control de velocidad (no se especifica ley de control)	--
08	T	--	E	Control de velocidad	--

			Funcionando en campo	(no se especifica ley de control)	
09	A	Modelado dinámico de la subtarea “turn robot”.	E Funcionando en laboratorio	Control fuzzy vs PD, para cada subtarea.	Estructura jerárquica

Tabla 1. Cuadro comparativo de los artículos revisados.

De acuerdo a la tabla 1, las referencias Ref. 01 a Ref. 08 presentan soluciones parciales al problema planteado de control de movimiento. Plantean estrategias de control muy generales, cuyo nivel de detalle no es abordado. La referencia 09 cubre varios aspectos relevantes para el estudio y desarrollo del presente módulo. Más detalles sobre cada una de las referencias pueden ser vistos en los Resúmenes Técnicos de Referencia.

### **3.- DEFINICIÓN DEL TEMA**

El daño en las líneas de alto voltaje de CFE ocasiona apagones en ciudades que generan pérdidas económicas para el sector industrial, México no cuenta con ese tipo de tecnología, al desarrollar un robot que se desplace por las líneas de alta tensión y pueda evadir obstáculos, desde su diseño hasta la fabricación, para ello se necesita el estudio de la dinámica, para ver cuál va a ser su comportamiento.

### **4.- JUSTIFICACIÓN**

La ventaja que presenta el invertir dinero en un robot, es que, aunque es una inversión a largo plazo, por el costo inicial que representa la inversión en un robot que representa el desarrollo de un robot, la productividad es aumentada considerablemente, además de una mejor eficiencia comparada con la que podrá tener un operario calificado, ya que al ser humano le afectan, como son, la mala alimentación, las desveladas y conflictos emocionales que se le pueden llegar a presentar, teniendo estos un gran peso en la inspección que se está desarrollando, a diferencia de un manipulador robótico, el cuál al no poseer sentimientos, no tiene ningún tipo de problema emocional, que afecte su trabajo.

El desarrollo de este proyecto servirá para evitar las interrupciones de energía eléctrica que genera pérdidas a las industrias pequeñas como industrias grandes, el diseño de este robot para mantenimiento preventivo en cuanto a seguridad se refiere, es más barato tener un robot que realiza tareas de alto riesgo evita que se pierdan las vidas de las personas calificadas que suben a inspeccionar las líneas, en caso de que sucediera un accidente, el robot no necesita hospital para ser atendido, por lo tanto no se necesita pagar una póliza de seguro para resguardar su salud y se ahorra en la compra del traje protector de plata que usa la persona para poder subir a inspeccionar las líneas.

## **5.- OBJETIVOS**

### **Objetivo General**

La realización de la dinámica de un robot de 5 GDL

### **Objetivos específicos**

1. Obtener las matrices de transformación homogénea.
2. Obtener la cinemática directa.
3. Obtener la cinemática inversa.
4. Obtener la matriz de Inercia.
5. Obtener el vector de coriolis.
6. Obtener el vector de gravedad.
7. Hacer la comprobación del modelo en simulink.

## **6.- FUNDAMENTOS**

### **Clasificación.**

Las diferentes clasificaciones en que pueden ser catalogados los manipuladores robóticos, tomando en cuenta: la morfología, la energía primaria para inducir el movimiento, la clasificación de acuerdo a los lineamientos de la Organización Internacional y Estandarización y al uso final al que estén destinados.

### **Clasificación de los robots de acuerdo a su mecánica.**

De acuerdo a la geometría ó a su configuración mecánica básica del manipulador robótico, estos pueden clasificarse como cartesianos, cilíndricos, esféricos, articulados.

#### **Geometría cartesiana.**

Un robot con geometría cartesiana puede mover su efecto final a cualquier posición dentro de un cubo ó rectángulo definido como su área de trabajo. Esta configuración está formada por dos categorías, transversal y longitudinal.

Este tipo de coordenadas geométricas tienen las siguientes ventajas:

Áreas muy larga de trabajo, ya que el desplazamiento en el eje "X" puede ser incrementado en el eje muy fácilmente.

El montaje de cabezales grandes deja grandes áreas de manufaturas libres para otros usos.

Pueden ser usados sistemas de control simple.

Las desventajas que presentan estos tipos de coordenadas son:

El acceso al área de trabajo, por medio del cabezal con carga de otros materiales ó equipos, puede desequilibrar la estructura.

En algunos modelos la posición de los mecanismos de manejo, así como el control eléctrico, puede causar dificultades de mantenimiento.

## **Geometría cilíndrica.**

Un robot de geometría cilíndrica puede mover a su efecto final dentro del volumen descrito por un cilindro. El brazo de geometría cilíndrica está posicionado, en el área de trabajo por su movimiento, por dos movimientos lineales, uno a lo largo de eje "Z", otro en la dirección de radio "R", y uno de rotación angular del eje Z.

Algunas ventajas de la geometría cilíndrica son:

Un profundo alcance horizontal en las máquinas de producción.

La estructura vertical de la máquina ahorra espacio en la planta.

Es necesaria una estructura rígida para soportar buenas cargas y una buena respetabilidad.

La gran desventaja es el alcance limitado a la izquierda y a la derecha, debido a las deformaciones mecánicas.

## **Geometría esférica.**

Los brazos de geometría esférica, también llamados polares, son aquellos que pueden mover su efecto final dentro del volumen descrito por una esfera, requieren un movimiento coordinado en todos los ejes de posición en las direcciones X, Y y Z.

Los brazos de geometría esférica, positionan al robot en dos rotaciones y un desplazamiento lineal. La orientación de la herramienta está dada por medio de tres rotaciones en la muñeca (rotación, cabeceo y alabeo).

Las ventajas y desventajas con las mismas que los brazos de geometría cilíndrica, con la excepción de que los robots de geometría cilíndrica poseen una estructura más vertical, y los de geometría son más bajos y alargados en tamaño.

## **Geometría articulada.**

Los robots industriales articulados, también llamados máquinas antropomórficas, tienen un área de trabajo irregular, tienen dos grandes variantes: verticalmente articulado y horizontalmente articulado.

Los robots verticalmente articulados, son también llamados juntas esféricas y tienen tres movimientos principales angulares, la base de rotación (eje 1), el hombro (eje 2) y antebrazo (eje 3).

Ventajas de los robots verticalmente articulados:

Aunque ocupan un mínimo de espacio en el piso, tienen un gran alcance horizontal.

Tienen un buen radio de alcance, resultado de la habilidad de contraer el brazo cuando se encuentra en su posición de nido.

Una alta movilidad y posicionamiento del brazo que les permite tener alcance en espacios cerrados y alrededor de obstrucciones.

Existen dos posibles variaciones de la geometría verticalmente articulada, descritas como:

Un eje adicional de movimiento rotacional (eje 4) en el antebrazo, que permite rotar a este eslabón.

Un eje de movimiento adicional lineal (eje 4) en el antebrazo, que le permite expandirse y extenderse.

El robot horizontalmente articulado, tiene 2 movimientos angulares que consisten en: una rotación de el brazo y el antebrazo, y un movimiento de posición lineal para un posicionamiento vertical. Los brazos horizontalmente articulados están divididos por dos configuraciones mecánicas:

El brazo de robot articulado.

El robot articulado de base horizontal.

## **Clasificación de los robots de acuerdo a su fuente de poder.**

Existen tres fuentes primarias para la alimentación de energía en la manufactura de los sistemas de potencia, energía hidráulica, energía neumática y fuerza electromagnética

usadas como generadoras de movimiento en los robots actuales. La clasificación de los robots en base a la fuente de energía utilizada es la siguiente:

### ***Potencia hidráulica.***

Los robots que utilizan como fuente primaria un generador hidráulico, son diseñados para trabajos en los que la fuerza necesaria para ejecutar la tarea es muy grande, estos robots obtiene la fuerza requerida a través de una bomba hidráulica que alimenta a los actuadores hidráulicos que a su vez generan el movimiento de los eslabones del manipulador.

### ***Potencia neumática.***

Los robots que utilizan como fuente primaria el aire comprimido, son diseñados para trabajos en los que la fuerza que se requerirá es pequeña, pero a velocidades considerables, estos robots obtienen la fuerza requerida a través de un compresor de aire, que alimentan los actuadores neumáticos, que a su vez generan el movimiento de los eslabones del manipulador.

### ***Potencia electromagnética.***

Los robots que utilizan la fuerza electromagnética, son los de menor capacidad en cuanto a fuerza ó trabajo se refieren, puede llegar a ser muy precisos, dependiendo el número del número de pasos de los motores que moverán las articulaciones, estos motores son alimentados a través de una corriente eléctrica a diferentes voltajes.

### **Clasificación de acuerdo a la organización a la organización internacional de estándares (ISO).**

La ISO ha establecido muchos documentos estándares para ayudar en la colección de datos válidos de un robot, siendo cuatro áreas principales: secuencia, trayectoria,

adaptabilidad y tele operación. La operación del controlador del robot provee la principal diferencia en la clasificación de categorías dadas por el estándar.

### ***Secuencia.***

El robot neumático no servo-controlado con control de línea de paro a paro, ya sea en geometría cartesiana ó cilíndrica, es el que mejor describe esta categoría. La naturaleza binaria de encendido y apagado del controlador de salida, maneja los ejes secuencialmente, para una buena definición de los puntos finales. La trayectoria sin embargo no está definida ó controlada. El controlador más frecuente para esta categoría de robots es el PLC.

### ***Trayectoria.***

Está categoría incluye todas las geometría con servomotores eléctricos ó con ejes hidráulicos y operaciones de trayectorias controlada. Esta clasificación se caracterizan por el movimiento de multiejes y movimientos en línea recta generados internamente,

### ***Adaptables.***

Está es una nueva categoría que incluye las “máquinas pensantes”. Ejemplos puros de esta categoría no existen, sin embargo, robots de trayectoria operados con sensores adaptables, o controles con función de auto aprendizaje, tipifican este sistema.

### ***Clasificación de acuerdo a su empleo.***

#### ***Robot de tomar y colocar.***

Es el robot más sencillo, este robot toma un objeto y lo coloca en otro lugar. La libertad de su movimiento suele estar limitada a los grados de libertad de manipulador.

### ***Servomotor.***

En este robot se emplean servomecanismos para los brazos y manos, a fin de modificar su sentido de movimiento cuándo está en el aire.

### ***Robot programable.***

Se acciona con un controlador programable, en el cual se almacena una secuencia de movimientos en una memoria y estos se repiten en forma continua.

### ***Robot controlado por computadora***

Este tipo de robot controlado por computadora mediante instrucciones electrónicas al controlador.

### ***Robot sensorial.***

Es un robot controlado por computadora que tiene uno ó más sentidos artificiales para detectar las zonas de trabajo y retroalimentar la información al controlador.

### ***Robot para la línea de ensamble.***

Es un robot controlado por computadora, que puede tener ó no tener sensores; está destinado a trabajos en la línea de ensamble.

## Cinemática directa

Se denomina cinemática directa a una técnica usada en gráficos 3D por computadora, para calcular la posición de partes de una estructura articulada a partir de sus componentes fijas y las transformaciones inducidas por las articulaciones de la estructura.

Un ejemplo típico de estructura jerárquica sobre el que realizar éstos cálculos es un robot, formado por cuerpos rígidos enlazados por articulaciones. Se puede establecer un sistema de referencia fijo situado en la base del robot, y describir la localización de cada uno de los eslabones con respecto a dicho sistema de referencia. Una pieza rígida A depende jerárquicamente de otra B si, para alcanzar la parte fija de la estructura (base del robot) desde A, se debe pasar por B. Para calcular la posición de una pieza rígida de la estructura se deben calcular las posiciones de todas las piezas de las que depende. Bibliotecas gráficas de uso generalizado, como OpenGL, están diseñadas para facilitar estos cálculos y llevarlos a cabo eficientemente mediante pilas de matrices.

## Cadenas cinemáticas

Concepto: Con este término se define a un modo de ejecución del trabajo muscular durante un movimiento, en el cual participa un conjunto de músculo agonista y sinergistas, inducido por la regulación de un patrón de movimiento. A su vez cada patrón responde a una unidad neurológica por participar de un control motor dependiente de la inervación reciproca. Cada músculo integrante se encarga de la operación de un movimiento parcial, que es componente de un movimiento total por diferentes eslabones al que denominamos cadenas cinemáticas.

La base fisiológica de las cadenas depende de una actividad compleja bien organizada y sincronizada de varios sistemas de órganos, así como de la interacción de diferentes leyes que se aplican en la producción del movimiento. Entre los sistemas que intervienen se destacan:

- Sistema Óseo-articular y ligamentoso: Para producirse una cadena cinemática, deben estar implicado varias articulaciones o palancas óseas, cada una de ellas concatenadas, donde el brazo fijo de una palanca sea el brazo móvil de la otra. Cada una de estas conexiones de palancas tiene un orden que facilita la amplitud del movimiento. Dando como resultado que las palancas proximales sea de tipo de conexión triaxil y en su parte distal terminen en articulaciones uniaxial. De esta forma se garantizan en la cadena cinemática todos los grados de libertad necesarios para garantizar toda la amplitud de movimiento.
- Sistema Muscular: Una cadena se irá formando en la medida que interactúen músculos agonista y sinergista, pero, en contraparte necesita de la acción

contraria del músculo antagonista. Los primeros responderán a un patrón de contracción muscular y los segundos a uno de tipo relajación con elongación. La actividad en común de ambos, con acciones diferentes garantizarán el desempeño del patrón de movimiento en su amplitud.

- Sistema Nervioso: Participa como controlador y regulador de la actividad voluntaria del movimiento, la fuerza, la velocidad y la coordinación para que se pueda producir con calidad toda la amplitud del movimiento de la cadena. Para la producción de una cadena entran en juego la participación de varios elementos neurales, tales como: la acción en conjunto de la corteza motora primaria, la premotora y la auxiliar, así como la integración de los núcleos del tálamo y el cerebelo. El producto final de este control funcional recae en la sincronización de la actividad de los músculos agonista apoyada por los sinergista y la relajación por elongación de los músculos antagonistas.

### **Leyes o principios presentes en la actividad de una cadena cinemáticas.**

- Ley de la aproximación y de la distorsión: su base fisiológica radica en que al contraerse un músculo tienden a aproximarse sus tendones, dando como resultado un acortamiento del vientre, al finalizar este proceso los tendones que partieron de planos diferentes deben de quedar en un mismo plano, dejando su fibras musculares en alineación con ellos, de esta forma se produce una contracción efectiva en la cadena. El producto final en una amplitud de las palancas integrantes cada una en su grado máximo de libertad.
- Tipo de contracción: para que se produzca una cadena cinemática debe efectuarse una contracción de tipo isotónica, pues las isométricas no garantizan grado de libertad del movimiento.
- Leyes de Sherrington: son las leyes de la contracción muscular. Primera Ley: Un músculo cuando recibe un estiramiento máximo, sufrirá como efecto reflejo una aproximación intensa de sus bordes, ocasionando una contracción máxima, lo que quiere decir que a un estiramiento extremo el músculo se contraiga con mayor potencia que en condiciones de trabajo normal. Segunda ley: Cuando un músculo agonista de movimiento que se está ejecutando se contrae por inervación inversa y sucesiva el músculo antagonista se relajara al máximo. Pero quedara preparado este antagonista para efectuar una contracción más efectiva.
- Principio de la Resistencia Máxima: se cataloga como la base de las técnicas de facilitación neuromuscular. Tiene como fundamento el principio de estimulación de los huesos musculares y el incremento gradual de la tensión intramuscular, que provee al músculo de una gran energía para doblar su

fuerza y a su vez en fuente de irradiación de esa energía a los músculos que comporten su mismo patrón de movimiento o a los antagonista de el. Por eso no podemos ver divorciada las técnicas de facilitación de los patrones de movimientos y las cadenas cinemáticas, puesto que los tres conceptos trabajan al unísono.

- Patrones de Movimiento: existe grupos musculares que se encuentra inervado por un mismo nervio, lo que obliga a los mismo a trabajar en unidad, trabajando unos como agonista principales del movimiento y otras como auxiliares. De esta forma músculo de que participan en diferentes palancas trabajaran a la vez y con el mismo movimiento, garantizando el desplazamiento de un miembro en sus grados de libertad de movimiento.
- Todos estos principio y leyes van dando la idea, de cuando trabajamos con un paciente con un fin (sea buscando fuerza, velocidad o resistencia) tenemos que tener en cuenta tanto aspecto para formular los objetivos y no producir daños al pacientes en otros segmentos distante del que trabajamos por el empleo de estos principios. Ejemplo: Cuando un paciente con espasticidad predominante de miembro inferior comienzo a trabajar la cadena cinemática del miembro superior por interacción de las cadenas, la facilitación neuromuscular y los patrones ocasionaré un incremento de esta espasticidad en los miembros inferiores que me impedirán después trabajar sobre ellos.

## Obtención de los parámetros de Denavit-Hartemberg.

Denavit-Hartenberg propusieron en 1955 un método matricial que permite establecer de manera sistemática un sistema de coordenadas ( $S_i$ ) ligado a cada eslabón  $i$  de una cadena articulada, pudiéndose determinar a continuación las ecuaciones cinemáticas de la cadena completa.

Según la representación D-H, escogiendo adecuadamente los sistemas de coordenadas asociados para cada eslabón, será posible pasar de uno al siguiente mediante 4 transformaciones básicas que dependen exclusivamente de las características geométricas del eslabón.

Estas transformaciones básicas consisten en una sucesión de rotaciones y traslaciones que permitan relacionar el sistema de referencia del elemento  $i$  con el sistema del elemento  $i-1$ . Las transformaciones en cuestión son las siguientes:

- Rotación alrededor del eje  $Z_{i-1}$  un ángulo  $\theta_i$ .
- Traslación a lo largo de  $Z_{i-1}$  una distancia  $d_i$ ; vector  $d_i$  (  $0,0,d_i$  ).

- Traslación a lo largo de  $X_i$  una distancia  $a_i$ ; vector  $a_i$  ( 0,0, $a_i$  ).
- Rotación alrededor del eje  $X_i$ , un ángulo  $\alpha_i$ .

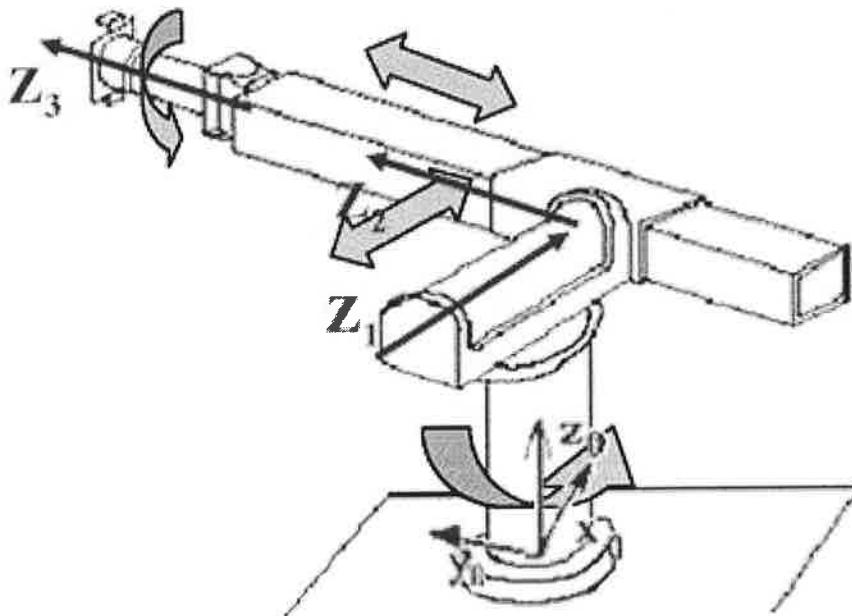


Figura 6.1. Rotaciones y translaciones en un robot.

Dado que el producto de matrices no es conmutativo, las transformaciones se han de realizar en el orden indicado. De este modo se tiene que:

$$T_n^{n-1} = Rot_{zn-1}(\theta_n) * Trans_{zn-1}(d_n) * Trans_{xn}(a_n) * Rot_{xn}(\alpha_n)$$

(6.1)

Y realizando el producto de matrices:

$$Trans(d_x, d_y, d_z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & 0 & d_y \\ 0 & 0 & 1 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(6.2)

$$Rot(x, \theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
(6.3)

$$Rot(y, \theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
(6.4)

$$Rot(z, \theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
(6.5)

$$T_n^{n-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta_n & -\sin\theta_n \cos\alpha_n & \sin\theta_n \sin\alpha_n & a_n \cos\theta_n \\ \sin\theta_n & \cos\theta_n \cos\alpha_n & -\cos\theta_n \sin\alpha_n & a_n \sin\theta_n \\ 0 & \sin\alpha_n & \cos\alpha_n & d_n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
(6.6)

Donde  $\theta_i$ ,  $a_i$ ,  $d_i$ ,  $\alpha_i$ , son los parámetros D-H del eslabón i. De este modo, basta con identificar los parámetros  $q_i$ ,  $a_i$ ,  $d_i$ ,  $\alpha_i$ , para obtener matrices A y relacionar así todos y cada uno de los eslabones del robot.

Como se ha indicado, para que la matriz  $i-1A_i$ , relate los sistemas  $(S_i)$  y  $(S_{i-1})$ , es necesario que los sistemas se hayan escogido de acuerdo a unas determinadas normas. Estas, junto con la definición de los 4 parámetros de Denavit-Hartenberg, conforman el siguiente algoritmo para la resolución del problema cinemático directo:

DH1	Numerar los eslabones comenzando con 1 (primer eslabón móvil de la cadena) y acabando con n (último eslabón móvil). Se numerará como eslabón 0 a la base fija del robot.
DH2	Numerar cada articulación comenzando por 1 (la correspondiente al primer grado de libertad y acabando en n).
DH3	Localizar el eje de cada articulación. Si esta es rotativa, el eje será su propio eje de giro. Si es prismática, será el eje a lo largo del cual se produce el desplazamiento.
DH4	Para $i$ de 0 a $n-1$ , situar el eje $Z_i$ , sobre el eje de la articulación $i+1$ .
DH5	Situar el origen del sistema de la base ( $S_0$ ) en cualquier punto del eje $Z_0$ . Los ejes $X_0$ e $Y_0$ se situaran de modo que formen un sistema dextrógiro con $Z_0$ .
DH6	Para $i$ de 1 a $n-1$ , situar el sistema ( $S_i$ ) (solidario al eslabón $i$ ) en la intersección del eje $Z_i$ con la línea normal común a $Z_{i-1}$ y $Z_i$ . Si ambos ejes se cortasen se situaría ( $S_i$ ) en el punto de corte. Si fuesen paralelos ( $S_i$ ) se situaría en la articulación $i+1$ .
DH7	Situar $X_i$ en la línea normal común a $Z_{i-1}$ y $Z_i$ .
DH8	Situar $Y_i$ de modo que forme un sistema dextrógiro con $X_i$ y $Z_i$ .
DH9	Situar el sistema ( $S_n$ ) en el extremo del robot de modo que $Z_n$ coincida con la dirección de $Z_{n-1}$ y $X_n$ sea normal a $Z_{n-1}$ y $Z_n$ .
DH10	Obtener $\theta_i$ como el ángulo que hay que girar en torno a $Z_{i-1}$ para que $X_{i-1}$ y $X_i$

	queden paralelos.
DH11	Obtener $d_i$ como la distancia, medida a lo largo de $Z_{i-1}$ , que habría que desplazar $(S_{i-1})$ para que $X_i$ y $X_{i-1}$ quedasen alineados.
DH12	Obtener $a_i$ como la distancia medida a lo largo de $X_i$ (que ahora coincidiría con $X_{i-1}$ ) que habría que desplazar el nuevo $(S_{i-1})$ para que su origen coincidiese con $(S_i)$ .
DH13	Obtener $\alpha_i$ como el ángulo que habría que girar entorno a $X_i$ (que ahora coincidiría con $X_{i-1}$ ), para que el nuevo $(S_{i-1})$ coincidiese totalmente con $(S_i)$ .
DH14	Obtener las matrices de transformación $i-1A_i$ .
DH15	Obtener la matriz de transformación que relaciona el sistema de la base con el del extremo del robot $T = 0A_1, 1A_2 \dots n-1A_n$ .
DH16	La matriz $T$ define la orientación (submatriz de rotación) y posición (submatriz de traslación) del extremo referido a la base en función de las $n$ coordenadas articulares.

### Parámetros DH para un eslabón giratorio

Los cuatro parámetros de DH ( $\theta_i$ ,  $d_i$ ,  $a_i$ ,  $\alpha_i$ ) dependen únicamente de las características geométricas de cada eslabón y de las articulaciones que le unen con el anterior y siguiente (Figura 1.3).

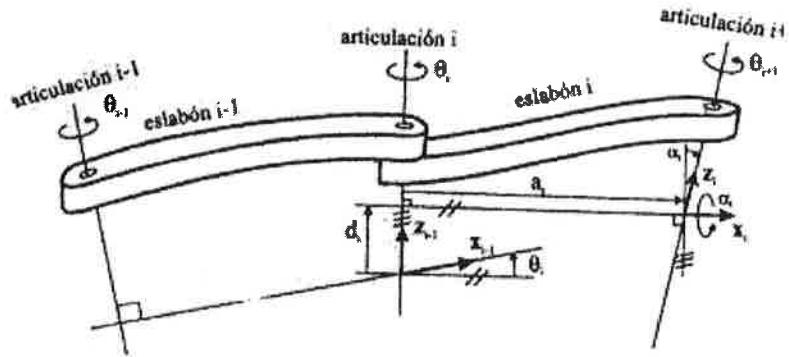


Figura 6.2. Unión de 2 eslabones, con las características de cada eslabón

- $\theta_i$  Es el ángulo que forman los ejes  $X_{i-1}$  y  $X_i$  medido en un plano perpendicular al eje  $Z_{i-1}$ , utilizando la regla de la mano derecha. Se trata de un parámetro variable en articulaciones giratorias.
- $d_i$  Es la distancia a lo largo del eje  $Z_{i-1}$  desde el origen del sistema de coordenadas ( $i-1$ - esimo hasta la intersección del eje  $Z_{i-1}$  con el eje  $X_i$ . Se trata de un parámetro variable en articulaciones prismáticas.
- $a_i$  Es a la distancia a lo largo del eje  $X_i$  que va desde la intersección del eje  $Z_{i-1}$  con el eje  $X_i$  hasta el origen del sistema  $i$ -esimo, en el caso de articulaciones giratorias. En el caso de articulaciones prismáticas, se calcula como la distancia más corta entre los ejes  $Z_{i-1}$  y  $Z_i$ .
- $\alpha_i$  Es el ángulo de separación del eje  $Z_{i-1}$  y el eje  $Z_i$ , medido en un plano perpendicular al eje  $X_i$ , utilizando la regla de la mano derecha.

Una vez obtenidos los parámetros DH, el cálculo de las relaciones entre los eslabones consecutivos del robot es inmediato, ya que vienen dadas por las matrices A, que se calcula según la expresión general.

### La Matriz de transformación T.

En control de posición de manipuladores industriales se hace uso de diversas técnicas para lograr el objetivo de control, en la mayoría de los casos dichas técnicas requieren como entrada las coordenadas espaciales deseadas que alcanzará el efecto final. Si los puntos deseados corresponde a una curva espacial complicada pero definida en forma paramétrica en un plano, la obtención de los puntos espaciales de la curva pueden ser calculados empleando matrices de transformación. Para verificar de esta propuesta se

procede a simular las posiciones de un robot de tres grados de libertad bajo el esquema mostrado en la Figura (1.4).

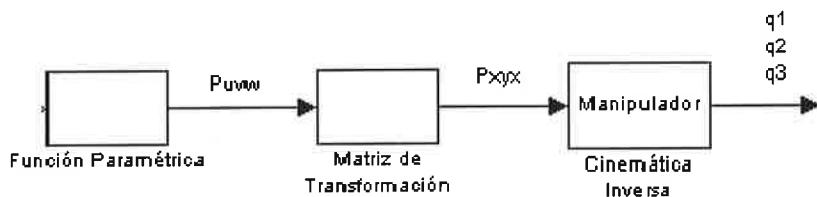


Figura 6.3.

Una matriz de Transformación Homogénea que transforma un vector de posición expresado en coordenadas homogéneas respecto a un sistema de coordenadas que ha sido rotado y trasladado a otro sistema de coordenadas, se define como una matriz de 4 x 4 y en general consistente de cuatro submatrices de la forma:

$$T_i = \begin{bmatrix} R_0^i & p_0^i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.7)$$

Sea un punto de coordenadas uvw P respecto al sistema UVW, cuyo origen coincide con el origen del sistema XYZ, si sobre el sistema UVW se aplican movimientos de rotación y traslación (ver Figura (1.4)) las nuevas coordenadas punto uvw P respecto al sistema fijo XYZ son obtenidas mediante el producto de una matriz de transformación y el vector uvw P expresado en coordenadas homogéneas. Nótese que el vector Pxxy también está expresado en coordenadas homogéneas.

$$Pxxy = T * Puvw \quad (6.8)$$

Nota: a partir de este momento \* se utilizará como signo de multiplicar.

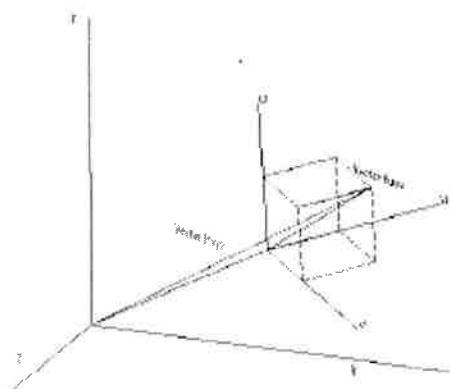


Figura 6.4.

$$P_{xyz} = \begin{bmatrix} R_0^i & p_0^i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} * P_{uvw}$$

(6.9)

La matriz de transformación permite localizar los puntos respecto al sistema fijo XYZ que definen una curva en el sistema UVW cuando este ha experimentado movimientos de rotación y traslación. Si el sistema XYZ coincide con la base de manipulador el cual posicionará el efecto final sobre cada uno de estos puntos, entonces los puntos son las coordenadas deseadas del efecto final P xyz.

La matriz de transformación empleada en este trabajo se obtiene mediante la consideración de los siguientes movimientos

- Rotación en el eje x un ángulo  $\alpha$
- Rotación en el eje y un ángulo  $\beta$
- Rotación en el eje z un ángulo  $\gamma$
- Traslación en el eje x una distancia de  $a$  unidades
- Traslación en el eje y una distancia de  $b$  unidades
- Traslación en el eje z una distancia de  $c$  unidades

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \cos\theta_n & -\sin\theta_n \cos\alpha_n & \sin\theta_n \sin\alpha_n & a_n \cos\theta_n \\ \sin\theta_n & \cos\theta_n \cos\alpha_n & -\cos\theta_n \sin\alpha_n & a_n \sin\theta_n \\ 0 & \sin\alpha_n & \cos\alpha_n & d_n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(6.10)

## Cinemática Inversa

El problema de la cinemática inversa consiste en encontrar los valores que deben adoptar las coordenadas articulares del robot  $q = [q_1, q_2, \dots, q_n]$  para que su extremo se posicione y oriente según una determinada localización espacial. Al contrario que el problema de la cinemática directa, el cálculo de la cinemática inversa no es sencillo ya que consiste en la resolución de una serie de ecuaciones fuertemente dependiente de la configuración del robot y además de existir diferentes  $q = [q_1, q_2, \dots, q_n]$  que resuelven el problema.

En la actualidad existen procedimientos genéricos susceptibles de ser programados para la resolución de la cinemática inversa y obtener los de valores articulares que posicen y orienten el extremo final. Sin embargo, el principal inconveniente de estos procedimientos es que son métodos numéricos iterativos, que no siempre garantizan

tener la solución en el momento adecuado. De esta manera, a la hora de resolver el problema cinemático inverso es mucho más adecuado encontrar una solución cerrada. Es decir, encontrar una relación matemática explícita de la forma:

$$q_k = f_k(x, y, z, \alpha, \beta, \varphi) \\ k = 1 \dots n \\ (6.11)$$

Para poder conseguir esta relación suele ser habitual emplear métodos geométricos, que consisten en la utilización de las relaciones trigonométricas y la resolución de los triángulos formados por los elementos y articulaciones del robot. La mayoría de los robots suelen tener cadenas cinemáticas relativamente sencillas, y los tres primeros gdl, que posicionan al robot en el espacio, suelen tener una estructura planar. Esta condición facilita la resolución. Además, los tres últimos grados de libertad suelen usarse para la orientación de la herramienta, lo cual permite la resolución desacoplada (desacople cinemático) de la posición del extremo del robot y de la orientación de la herramienta. Como alternativa para resolver el mismo problema se puede recurrir a manipular directamente las ecuaciones correspondientes al problema de la cinemática directa. Es decir, a partir de la relación entre la matriz de transformación y las ecuaciones en función de las coordenadas articulares  $q = [q_1, q_2, \dots, q_n]$ , es posible despejar las  $n$  variables articulares  $q_i$  en función de las componentes de la matriz  $R$  del vector  $p$ :

$$\begin{bmatrix} R_0^i & p_0^i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = t_{ij}(q_1 \dots q_n) \\ (6.12)$$

## Jacobiano

En cálculo vectorial, el jacobiano es una abreviación de la matriz jacobiana y su determinante, el determinante Jacobiano. Son llamados así en honor al matemático Carl Gustav Jacobi.

La matriz Jacobiana es una matriz formada por las derivadas parciales de primer orden de una función. Una de las aplicaciones más interesantes de esta matriz es la posibilidad de aproximar linealmente a la función en un punto. En este sentido, el Jacobiano representa la derivada de una función multivariable.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (6.13)$$

## El efecto Coriolis.

El efecto Coriolis, descrito en 1835 por el científico francés Gaspard-Gustave Coriolis, es el efecto que se observa desde todo sistema de referencia en rotación (y por tanto no inercial) sobre cualquier objeto que varíe su distancia respecto al eje de rotación de dicho sistema. Este efecto consiste en una aceleración relativa del objeto visto desde el sistema en rotación, cuando aquel se acerca o aleja de su eje. Esta aceleración es siempre perpendicular al eje de giro del sistema y a la velocidad del cuerpo.

El efecto Coriolis hace que un objeto que se mueve sobre el radio de un disco en rotación tienda a acelerarse con respecto a ese disco según si el movimiento es hacia el eje de giro o alejándose de éste. Por el mismo principio, en el caso de una esfera en rotación, el movimiento de un objeto sobre los meridianos también presenta este efecto, ya que dicho movimiento reduce o incrementa la distancia respecto al eje de giro de la esfera.

Debido a que el objeto sufre una aceleración desde el punto de vista del observador en rotación, es como si para éste existiera una fuerza sobre el objeto que lo acelera. A esta fuerza se la llama fuerza de Coriolis, y no es una fuerza real en el sentido de que no hay nada que la produzca. Se trata pues de una fuerza inercial o ficticia, que se introduce para explicar, desde el punto de vista del sistema en rotación, la aceleración del cuerpo, cuyo origen está en realidad, en el hecho de que el sistema de observación está rotando.

En el caso de un sistema en rotación, el observador ve que todos los objetos que no están sujetos se alejan de manera radial como si actuase sobre ellos una fuerza proporcional a sus masas y a la distancia a una cierta recta (el eje de rotación). Esa fuerza es la fuerza centrífuga que hay que compensar con la fuerza centrípeta para sujetar los objetos. Por supuesto, para un observador externo, situado en un sistema inercial (sistema fijo), la única fuerza que existe es la fuerza centrípeta, cuando los objetos están sujetos. Si no lo están, los objetos tomarán la tangente y se alejarán del eje de rotación.

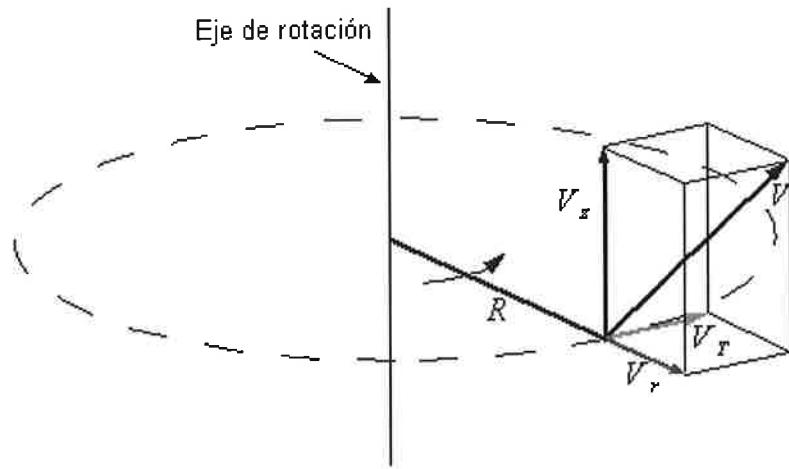


Figura 7.5. En un sistema de coordenadas cilíndricas, la velocidad (en negro) de un punto puede descomponerse en una velocidad radial (en magenta), una velocidad axial (en azul) y una velocidad tangencial (en verde).

## 7.- PROCEDIMIENTO

### Obtención de los parámetros de Denavit-Hartenberg.

Los parámetros de Denavit-Hartenber, permiten describir a partir de matrices la geometría de los eslabones del robot de 5 gdl, este método matricial establece un sistema coordenado para cada elemento de una cadena articulada. La representación de Denavit-Hartenber resulta una matriz homogénea de  $4 \times 4$ , que representa cada uno de los sistemas de coordenadas del elemento previo, así mediante transformaciones secuenciales, el extremo libre del manipulador se puede transformar y expresar en coordenadas de la base, que constituyen el sistema inercial, que constituyen el sistema inercial.

La convención a usar para localizar los marcos de las coordenadas de los eslabones como se ilustra en la figura siguiente:

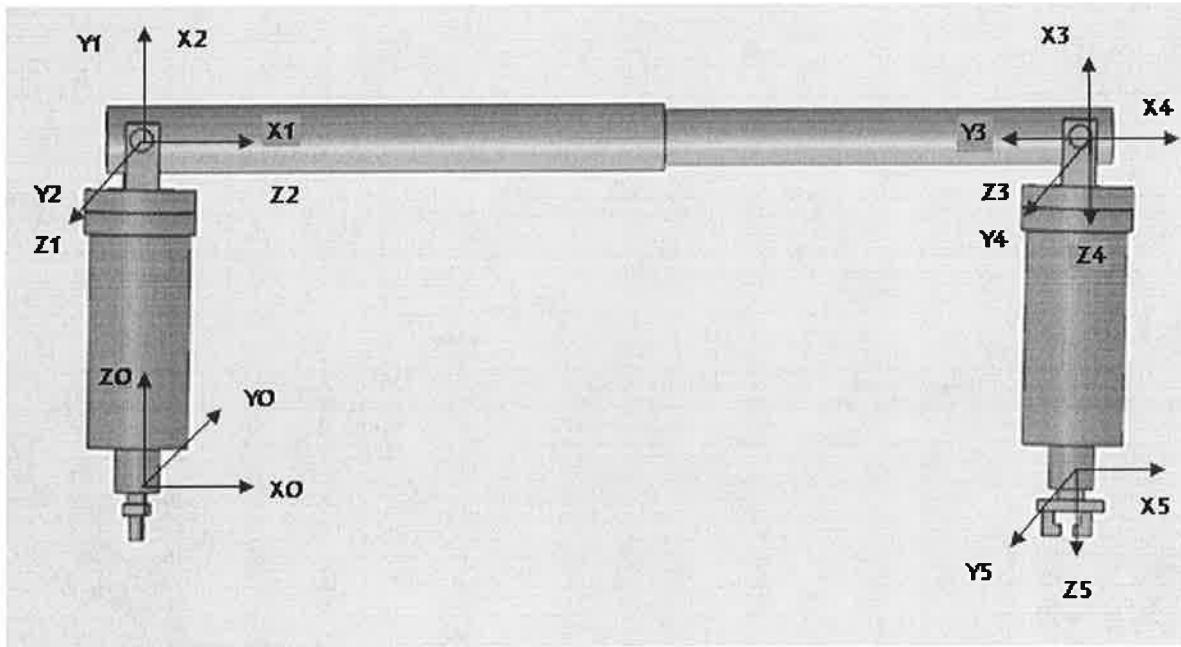


Figura 7.1. Coordenadas de los eslabones

De acuerdo con la metodología Craig el eje Z en el marco  $\{i\}$ , llamado  $Z_i$ , debe de coincidir con el eje de rotación  $i$ . El origen del marco  $\{i\}$  deberá estar localizado donde la perpendicular  $a_i$ , intercepte al eje de revolución  $i$ .  $X_i$  deberá apuntar a lo largo de  $a_i$  en la dirección del eje de revolución  $i$  al eje de revolución  $i+1$ .

Cuando  $a_1=0$ ,  $X_i$  será normal al plano  $Z_i$  y  $Z_{i+1}$ .  $a_i$  será medida de acuerdo a la regla de la mano derecha respecto a  $X_i$ , teniendo la libertad de escogerse el signo de  $a_i$  en dos opciones de dirección  $X_i$  y  $Y_i$ , debiendo tener siempre en cuenta la regla de la mano derecha para completar el  $i$ -ésimo marco.

$a_0$  = es la distancia de  $Z_0$  a  $Z_1$  medida a lo largo de  $X_0$  igual 0.

$\alpha_0$  = es la distancia de  $Z_0$  y  $Z_1$  medido sobre  $X_0$  igual  $0^\circ$ .

$d_0$  = es la distancia de  $X_0$  a  $X_1$  medida a lo largo de  $Z_0$  igual 0.

$\theta_0$  = es la distancia de  $X_0$  y  $X_1$  medida a lo largo de  $Z_0$  y es variable.

$a_1$  = es la distancia de  $Z_1$  a  $Z_2$  medida a lo largo de  $X_1$  igual 0.

$\alpha_1$  = es la distancia de  $Z_1$  y  $Z_2$  medido sobre  $X_1$  igual  $0^\circ$ .

$d_1$  = es la distancia de  $X_1$  a  $X_2$  medida a lo largo de  $Z_1$  igual 0.

$\theta_1$  = es la distancia de  $X_1$  y  $X_2$  medida a lo largo de  $Z_1$  y es variable.

$a_2$  = es la distancia de  $Z_2$  a  $Z_3$  medida a lo largo de  $X_2$  igual 0.

$\alpha_2$  = es la distancia de  $Z_2$  y  $Z_3$  medido sobre  $X_2$  igual  $0^\circ$ .

$d_2$  = es la distancia de  $X_2$  a  $X_3$  medida a lo largo de  $Z_2$  igual 0.

$\theta_2$  = es la distancia de  $X_2$  y  $X_3$  medida a lo largo de  $Z_2$  y es variable.

$a_3$  = es la distancia de  $Z_3$  a  $Z_4$  medida a lo largo de  $X_3$  igual 0.

$\alpha_3$  = es la distancia de  $Z_3$  y  $Z_4$  medido sobre  $X_3$  igual  $0^\circ$ .

$d_3$  = es la distancia de  $X_3$  a  $X_4$  medida a lo largo de  $Z_3$  igual 0.

$\theta_3$  = es la distancia de X3 y X4 medida a lo largo de Z3 y es variable.

$a_4$  = es la distancia de Z4 a Z5 medida a lo largo de X4 igual 0.

$\alpha_4$  = es la distancia de Z4 y Z5 medido sobre X4 igual  $0^\circ$ .

$d_4$  = es la distancia de X4 a X5 medida a lo largo de Z4 igual 0.

$\theta_4$  = es la distancia de X4 y X5 medida a lo largo de Z4 y es variable.

$a_5$  = es la distancia de Z5 a Z6 medida a lo largo de X5 igual 0.

$\alpha_5$  = es la distancia de Z5 y Z6 medido sobre X5 igual  $0^\circ$ .

$d_5$  = es la distancia de X5 a X6 medida a lo largo de Z5 igual 0.

$\theta_5$  = es la distancia de X5 y X6 medida a lo largo de Z5 y es variable.

En la siguiente tabla se resumen los parámetros de Denavit-Hartenberg, que describen las medidas geométricas para cada par cinemático.

Marco	$\theta$	$d$	$a$	$\alpha$
0-1	$\theta_1$	$d_1$	0	$\pi/2$
1-2	$\theta_2$	0	0	$\pi/2$
2-3	0	$d_3$	0	$-\pi/2$
3-4	$\theta_4$	0	0	$\pi/2$
4-5	$\theta_5$	$d_5$	0	0

Tabla 7.1. Parámetros de Denavit-Hartenberg

### Obtención de las matrices de transformación de los eslabones.

Los parámetros obtenidos de Denavit-Hartenberg, son sustituidos en la matriz general de rotación-translación, para obtener así la matriz que describirá cada eslabón de acuerdo a las características geométricas del mismo, en esta matriz está incluida la longitud de eslabón, la posición y la rotación en relación con los eslabones se acopla. De acuerdo con la metodología de Craig será:

$$A_i = \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i)\cos(\alpha_i) & \sin(\theta_i)\sin(\alpha_i) & a_i\cos(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & \cos(\theta_i)\cos(\alpha_i) & -\cos(\theta_i)\sin(\alpha_i) & a_i\sin(\theta_i) \\ 0 & \sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.1)$$

Donde i varía del 1 al 5, para obtener los 5 vectores de pares gravitacionales.

Matriz que define el marco {i}, relativo al marco {i-1}, de acuerdo con la figura 2.1, se relaciona tres marcos de referencia intermedios {P}, {Q}, {R}, situados a lo largo de este eslabón.

Al sustituir los datos de cada en eslabón en la matriz (fórmula 2.1), se obtiene de cada uno de los eslabones, así pues, se tiene:

$$A_1 = \begin{bmatrix} \cos(q_1) & 0 & -\sin(q_1) & 0 \\ \sin(q_1) & 0 & \cos(q_1) & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.2)$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} \cos(q_2) & 0 & -\sin(q_2) & 0 \\ \sin(q_2) & 0 & \cos(q_2) & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.3)$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.4)$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} \cos(q_4) & 0 & -\sin(q_4) & 0 \\ \sin(q_4) & 0 & \cos(q_4) & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.5)$$

$$A_5 = \begin{bmatrix} \cos(q_5) & 0 & -\sin(q_5) & 0 \\ \sin(q_5) & 0 & \cos(q_5) & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.6)$$

### Matriz de transformación homogénea.

Una vez obtenidas las matrices de transformación de cada uno de los eslabones, el siguiente paso es relacionarlas para así obtener la matriz de transformación T, esta matriz especifica la orientación y posición del extremo libre del manipulador con respecto a la

base de coordenadas, resultado de la multiplicación de las matrices de transformación en orden ascendente. La matriz de transformación estará dada por:

$$T_{(0,5)} = A_1 * A_2 * A_3 * A_4 * A_5 \quad (7.7)$$

Donde i varía del 1 al 5, para obtener los 5 vectores de pares gravitacionales

La matriz de transformación homogénea compuesta del manipulador, está dada de la siguiente manera:

$$T_i = \begin{bmatrix} R_0^i & p_0^i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.8)$$

Donde:

R Es la matriz de rotación.

p Es el vector de posición del extremo libre del manipulador.

i varía del 1 al 5, que indica el número de transformación homogénea.

## Cinemática directa

A partir de la obtención de las ecuaciones cinemáticas del manipulador, se obtiene la cinemática directa de este, como se mencionó anteriormente, esta consiste en dar los valores angulares que deberán tener las articulaciones del manipulador, para saber cuál es la posición y orientación del extremo libre del manipulador.

Para calcular la cinemática directa del manipulador, se sustituyen los valores de los parámetros de Denavit-Hartenberg, por lo que se deberán obtener los valores de la matriz de transformación homogénea.

En la matriz T encontraremos una sub-matriz  $R_{3x3}$  que es la matriz de rotación y un vector  $P_{1x3}$ , el vector P es el vector de posición del extremo libre del manipulador:

$$Px = \frac{1}{2}d_5 \sin(q_1 + q_2 + q_4) - \frac{1}{2}d_5 \sin(q_1 - q_2 - q_4) + \frac{1}{2}q_3 \sin(q_1 + q_2) - \frac{1}{2}q_3 \sin(q_1 - q_2) \quad (7.9)$$

$$Py = \frac{1}{2}d_5 \cos(q_1 - q_2 - q_4) - \frac{1}{2}d_5 \cos(q_1 + q_2 + q_4) + \frac{1}{2}q_3 \cos(q_1 - q_2) - \frac{1}{2}q_3 \cos(q_1 + q_2)$$

(7.10)

$$Pz = d_5 \cos(q_2 + q_4) - q_3 \cos(q_2) + d_1$$

(7.11)

## Cinemática inversa

Consiste en encontrar los valores que deben adoptar las coordenadas articulares del robot  $q=(q_1, q_2, \dots, q_n)$  exp. T para que su extremo se posicione y oriente según una determinada localización espacial.

Así como es posible abordar el problema cinemático directo de una manera sistemática a partir de la utilización de matrices de transformación homogéneas, e independientemente de la configuración del robot, no ocurre lo mismo con el problema cinemático inverso, siendo el procedimiento de obtención de las ecuaciones fuertemente dependiente de la configuración del robot.

$$\begin{aligned} rot_{(4,5)} &= rot_{(0,4)} * rot_{(0,5)} \\ (7.12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} rot_{(1,3)} &= rot_{(0,1)} * rot_{(0,2)} * rot_{(0,3)} \\ (7.13) \end{aligned}$$

## Cálculo de las velocidades angulares.

El cálculo de la velocidad angular a la cual se moverán las articulaciones, es por mucho un cálculo más sencillo que la obtención de las coordenadas generalizadas del manipulador ya que a diferencia del sistema anterior, este es un sistema lineal. Lo que se obtienen son las ecuaciones para el control de la velocidad lineal en el extremo libre del manipulador, en función de las velocidades angulares de los eslabones, como se describen a continuación:

$$\begin{matrix} 0 \\ Z_0 = \langle 0 \rangle \\ 1 \end{matrix}$$

(7.14)

$$Z_i = \begin{pmatrix} T_i(1,3) \\ T_i(2,3) \\ T_i(3,3) \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

Donde i varía del 1 al 5, se puede observar que es la tercera columna de la matriz de transformación.

### **Posición respecto al marco base de cada una de las articulaciones.**

$$Pc_{(0,i)} = \begin{pmatrix} T_i(1,4) \\ T_i(2,4) \\ T_i(3,4) \end{pmatrix} \quad (7.16)$$

Donde i varía del 1 al 5, para obtener los 5 vectores de posición.

### **Cálculo del Jacobiano.**

Además de tratar problemas de posicionamiento estáticos debemos analizar los robots en movimiento.

Cuando se analiza la velocidad de un mecanismo es conveniente definir una matriz llamada el Jacobiano del manipulador. El jacobiano establece una aplicación entre las velocidades del espacio de articulaciones y las velocidades del espacio cartesiano. En ciertos puntos (llamados singularidades) esta aplicación no es invertible.

Muchas veces los robots que no se mueven en el espacio, simplemente aplican una fuerza estática sobre alguna pieza o superficie de trabajo. En este caso se nos proporciona una fuerza de contacto y un momento de aquí que la matriz Jacobiana nos ayuda a encontrar la solución.

$$Jv_i = Z_{i-1} \times (P_c - P_{c-1}) \quad (7.17)$$

$$Jv = [Jv_1 \dots \dots Jv_n] \quad (7.18)$$

Para obtener el jacobiano se utiliza el producto cruz, donde  $i$  varía del 1 al 5, para obtener los valores del jacobiano de velocidad lineal.  $Z_i$  Es la velocidad angular y  $P_n$  es la posición del eslabón  $i$  respecto al marco de referencia.

## Calculando las velocidades angulares

La velocidad angular es una medida de la velocidad de rotación. Se la define como el ángulo girado por unidad de tiempo y se la designa mediante la letra griega  $\omega$ . Su unidad en el S.I. es el radián por segundo (rad/s).

La introducción del concepto de velocidad angular es de gran importancia por la simplificación que supone en la descripción del movimiento de rotación del sólido, ya que, en un instante dado, todos los puntos del sólido poseen la misma velocidad angular, en tanto que a cada uno de ellos le corresponde una velocidad tangencial que es función de su distancia al eje de rotación. Así pues, la velocidad angular caracteriza al movimiento de rotación del sólido rígido en torno a un eje fijo.

Aunque se la define para el movimiento de rotación del sólido rígido, también se la emplea en la cinemática de la partícula o punto material, especialmente cuando ésta se mueve sobre una trayectoria cerrada (circular, elíptica,etc).

$$Jw_i = Z_{i-1} \quad (7.19)$$

$$Jw = [Jw_1 \dots \dots Jw_n] \quad (7.20)$$

Donde  $i$  varía del 1 al 5, para obtener los valores del jacobiano de velocidad articular.  $Z_i$  Es la velocidad angular, tomando en cuenta que toma el valor de 0 para los eslabones que tienen movimiento translacional.

## Cálculo de las matrices de los momentos de inercia.

El momento de inercia o inercia rotacional es una medida de la inercia rotacional de un cuerpo. Más concretamente el momento de inercia es una magnitud escalar que refleja la distribución de masas de un cuerpo o un sistema de partículas en rotación, respecto al eje de giro. El momento de inercia sólo depende de la geometría del cuerpo y de la posición del eje de giro; pero no depende de las fuerzas que intervienen en el movimiento.

$$masa_i = m_i$$

(7.21)

$$In_i = \begin{bmatrix} I_{xx_i} & I_{xy_i} & I_{xz_i} \\ I_{yx_i} & I_{yy_i} & I_{yz_i} \\ I_{zx_i} & I_{zy_i} & I_{zz_i} \end{bmatrix}$$

(7.22)

Donde i varía del 1 al 5, estos valores se dejan indicados, ya que serán sustituidos en matlab, son los momentos de inercia que se obtienen del cad.

$$I_i = rot_{(0,i)} * In_i * rot_{(0,i)}^T$$

(7.23)

Donde i varía del 1 al 5, en esta parte se calculan las matrices de rotación de cada uno de los eslabones con respecto del marco base para la etapa del cálculo de la matriz m. (también se calcula la transpuesta).

## Cálculos para la matriz de inercia M

$$M = \sum_{i=1}^{n=5} [(Jv_i^T * m_i * Jv_i) + (Jw_i^T * I_i * Jw_i)]$$

(7.24)

En este caso i toma valores del 1 al 5,  $Jv_i$  es el jacobiano de velocidad lineal,  $Jw_i$  es el jacobiano de velocidad lineal,  $m_i$  es la masa del eslabón y  $I_i$  se obtiene a partir de la ecuación (7.23). Dando en nuestro caso particular una matriz de dimensión 5x5, donde  $M(q)$  son elementos de la matriz como se muestra en la formula (7.25).

$$M = \begin{bmatrix} M_{1,1}(q) & M_{1,2}(q) & M_{1,3}(q) & M_{1,4}(q) & M_{1,5}(q) \\ M_{2,1}(q) & M_{2,2}(q) & M_{2,3}(q) & M_{2,4}(q) & M_{2,5}(q) \\ M_{3,1}(q) & M_{3,2}(q) & M_{3,3}(q) & M_{3,4}(q) & M_{3,5}(q) \\ M_{4,1}(q) & M_{4,2}(q) & M_{4,3}(q) & M_{4,4}(q) & M_{4,5}(q) \\ M_{5,1}(q) & M_{5,2}(q) & M_{5,3}(q) & M_{5,4}(q) & M_{5,5}(q) \end{bmatrix} \quad (7.25)$$

## Cálculos para el vector de Coriolis V.

$$V_{(i,j,k)} = \left( \frac{\partial}{\partial q_k} M_{(i,j)} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial i} M_{(j,k)} \right) * \dot{q}_j * \dot{q}_k \quad (7.26)$$

Donde i, j y k varían del 1 al 5, solo uno puede variar a la vez, empezando por i y continuando por j, tal que al llegar j a 5 el siguiente valor de j será 1 y de k será 2 y a cada cambio, para obtener un total de 125 resultados para nuestro caso.  $V_i$  En este caso es un vector, para nuestro caso se necesitan 5 vectores. Para esto se agrupan las i que valgan el mismo valor como se muestra en las formulas del (7.27 al 7.31).

$$V_1 = \sum_{j=1}^{n=5} \sum_{k=1}^{n=5} V_{(1,j,k)} \quad (7.27)$$

$$V_2 = \sum_{j=1}^{n=5} \sum_{k=1}^{n=5} V_{(2,j,k)} \quad (7.28)$$

$$V_3 = \sum_{j=1}^{n=5} \sum_{k=1}^{n=5} V_{(3,j,k)} \quad (7.29)$$

$$V_4 = \sum_{j=1}^{n=5} \sum_{k=1}^{n=5} V_{(4,j,k)}$$

(7.30)

$$V_5 = \sum_{j=1}^{n=5} \sum_{k=1}^{n=5} V_{(5,j,k)}$$

(7.31)

$$V = [V_1 \quad V_2 \quad V_3 \quad V_4 \quad V_5]$$

(7.32)

El vector de coriolis se muestra en la formula (3.32), dónde se observan los 5 elementos que componen al vector para nuestro caso.

### Cálculo del vector de gravedad G.

Para calcular la gravedad se utiliza un vector dónde el valor de la fuerza de aceleración actúa en el eje Z, cómo se muestra en (7.32).

$$g = \langle 0 \quad 0 \quad -\hat{g} \rangle$$

$$\hat{g} = 9.81$$

(7.33)

Para calcular el vector de gravedad se multiplica la masa por la transpuesta del vector de gravedad multiplicado por el jacobiano lineal, como en la formula (7.34), j y k varía del 1 al 5, dando 25 resultados.

$$G_{(j,k)} = m_k * g^T * Jv_{(j,k)}$$

(7.34)

$$G_1 = - \sum_{k=1}^{n=5} G_{(1,k)}$$

(7.35)

$$G_2 = - \sum_{k=1}^{n=5} G_{(2,k)} \quad (7.36)$$

$$G_3 = - \sum_{k=1}^{n=5} G_{(3,k)} \quad (7.37)$$

$$G_4 = - \sum_{k=1}^{n=5} G_{(4,k)} \quad (7.38)$$

$$G_5 = - \sum_{k=1}^{n=5} G_{(5,k)} \quad (7.39)$$

$$G = [G_1 \quad G_2 \quad G_3 \quad G_4 \quad G_5] \quad (7.40)$$

Para obtener los 5 elementos del vector de pares gravitacionales, se agrupan las  $i$  para generar los 5 elementos, ver formulas (7.35-7.39), y el vector de pares gravitacionales está dado por la ecuación (7.40).

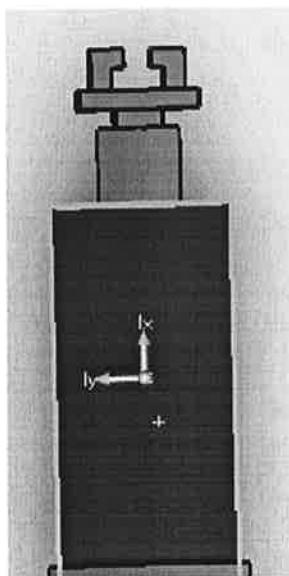
## Parámetros del CAD

En las siguientes figuras se muestran los parámetros de cada eslabón, entre ellas la masa y los momentos de inercia, que se meterán después en un programa en simulink para validarlos.

Propiedades físicas de brazo ( in Assembly Configuration - Predeterminado )

Sistema de coordenadas de salida: -- predeterminado --

El centro de masa y los momentos de inercia son los resultados en el sistema de coordenadas  
Densidad = 2700.00 kilogramos por metro cúbico



Masa = 0.79 kilogramos

Volumen = 0.00 metros<sup>3</sup>

Área de superficie = 0.12 metros<sup>2</sup>

Centro de masa: ( metros )

X = -0.01

Y = 0.18

Z = 0.47

Momentos de inercia: ( kilogramos \* metros<sup>2</sup>)

Medido desde el sistema de coordenadas de salida.

I<sub>xx</sub> = 0.21

I<sub>xy</sub> = -0.00

I<sub>xz</sub> = -0.00

I<sub>yx</sub> = -0.00

I<sub>yy</sub> = 0.18

I<sub>yz</sub> = 0.07

I<sub>zx</sub> = -0.00

I<sub>zy</sub> = 0.07

I<sub>zz</sub> = 0.03

Figura 7.2. Parámetros del eslabón 1

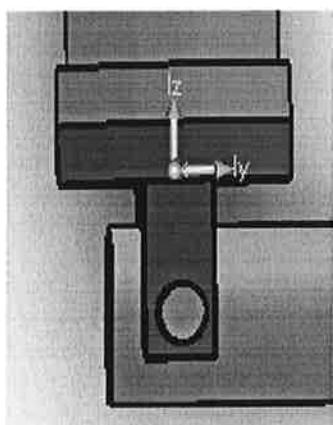
Propiedades físicas de base1 ( in Assembly Configuration - Predeterminado )

Sistema de coordenadas de salida: -- predeterminado --

El centro de masa y los momentos de inercia son los resultados en el sistema de coordenadas  
Densidad = 2700.00 kilogramos por metro cúbico

Masa = 0.50 kilogramos

Volumen = 0.00 metros<sup>3</sup>



Área de superficie = 0.03 metros<sup>2</sup>

Centro de masa: ( metros )

$$X = -0.01$$

$$Y = 0.05$$

$$Z = 0.47$$

Momentos de inercia: ( kilogramos \* metros<sup>2</sup>)

Medido desde el sistema de coordenadas de salida.

$$I_{xx} = 0.11$$

$$I_{yx} = -0.00$$

$$I_{zx} = -0.00$$

$$I_{xy} = -0.00$$

$$I_{yy} = 0.11$$

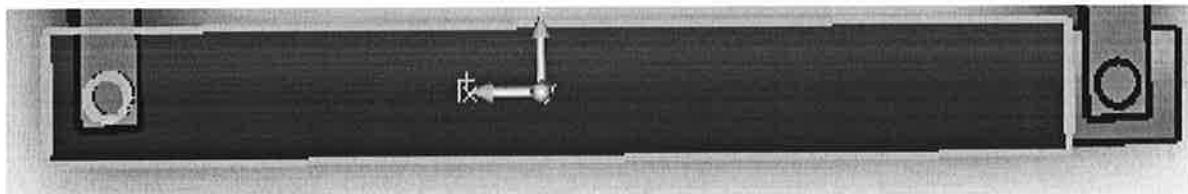
$$I_{zy} = 0.01$$

$$I_{xz} = -0.00$$

$$I_{yz} = 0.01$$

$$I_{zz} = 0.00$$

Figura 7.3. Parámetros del eslabón 2



Propiedades físicas de tubo1 ( in Assembly Configuration - Predeterminado )

Sistema de coordenadas de salida: -- predeterminado --

El centro de masa y los momentos de inercia son los resultados en el sistema de coordenadas

Densidad = 2700.00 kilogramos por metro cúbico

Masa = 1.00 kilogramos

Volumen = 0.00 metros<sup>3</sup>

Área de superficie = 0.15 metros<sup>2</sup>

Centro de masa: ( metros )

X = -0.01

Y = -0.00

Z = 0.12

Momentos de inercia: ( kilogramos \* metros<sup>2</sup>)

Medido desde el sistema de coordenadas de salida.

Ixx = 0.04                    Ixy = 0.00                    Ixz = -0.00

Iyx = 0.00                    Iyy = 0.04                    Iyz = -0.00

Izx = -0.00                    Izy = -0.00                    Izz = 0.00

Figura 7.4. Parámetros del eslabón 3

Propiedades físicas de base2 ( in Assembly Configuration - Predeterminado )

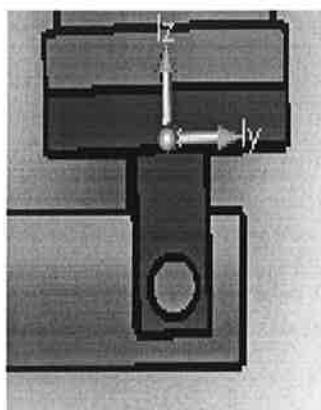
Sistema de coordenadas de salida: ~ predeterminado ~

El centro de masa y los momentos de inercia son los resultados en el sistema de coordenadas  
Densidad = 2700.00 kilogramos por metro cúbico

Masa = 0.50 kilogramos

Volumen = 0.00 metros<sup>3</sup>

Área de superficie = 0.03 metros<sup>2</sup>



Centro de masa: ( metros )

$$X = -0.01$$

$$Y = 0.05$$

$$Z = -0.37$$

Momentos de inercia: ( kilogramos \* metros<sup>2</sup>)

Medido desde el sistema de coordenadas de salida.

$$I_{xx} = 0.07$$

$$I_{xy} = -0.00$$

$$I_{xz} = 0.00$$

$$I_{yx} = -0.00$$

$$I_{yy} = 0.07$$

$$I_{yz} = -0.01$$

$$I_{zx} = 0.00$$

$$I_{zy} = -0.01$$

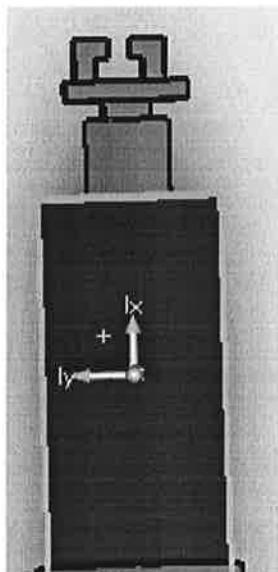
$$I_{zz} = 0.00$$

Propiedades físicas de brazo ( In Assembly Configuration - Predeterminado )

Sistema de coordenadas de salida: -- predeterminado --

El centro de masa y los momentos de inercia son los resultados en el sistema de coordenadas  
Densidad = 2700.00 kilogramos por metro cúbico

Masa = 0.79 kilogramos



Volumen = 0.00 metros<sup>3</sup>

Área de superficie = 0.12 metros<sup>2</sup>

Centro de masa: ( metros )

$$X = -0.01$$

$$Y = 0.18$$

$$Z = -0.37$$

Momentos de inercia: ( kilogramos \* metros<sup>2</sup>)

Medido desde el sistema de coordenadas de salida.

$$I_{xx} = 0.14$$

$$I_{xy} = -0.00$$

$$I_{xz} = 0.00$$

$$I_{yx} = -0.00$$

$$I_{yy} = 0.11$$

$$I_{yz} = -0.05$$

$$I_{zx} = 0.00$$

$$I_{zy} = -0.05$$

$$I_{zz} = 0.03$$

Figura 7.6. Parámetros del eslabón 5

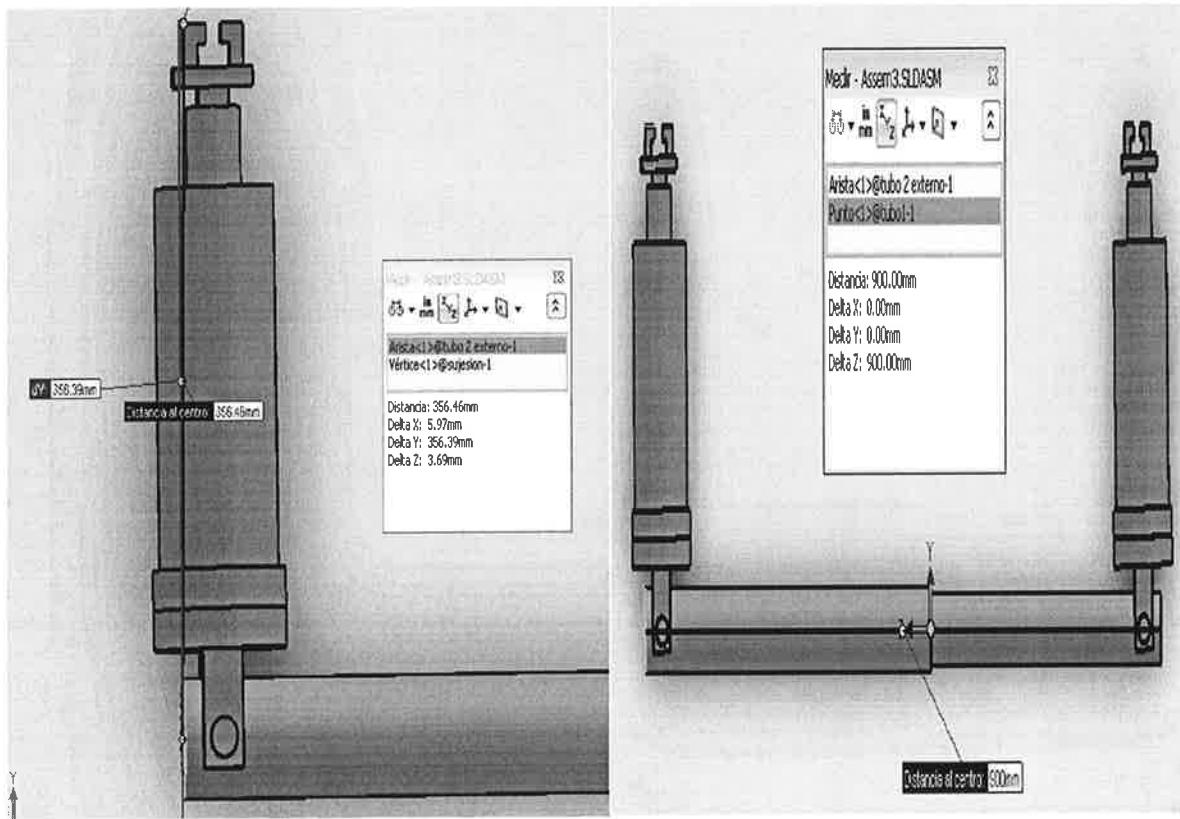


Figura 7.7. Longitudes del los eslabones 1 y 3.

## Comprobación del modelo

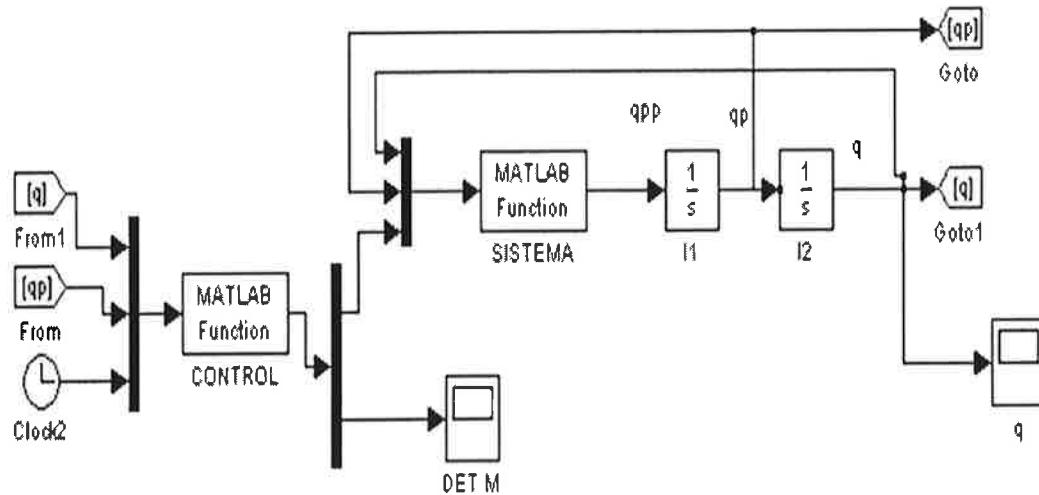


Figura 7.8. Diagrama en simulink.

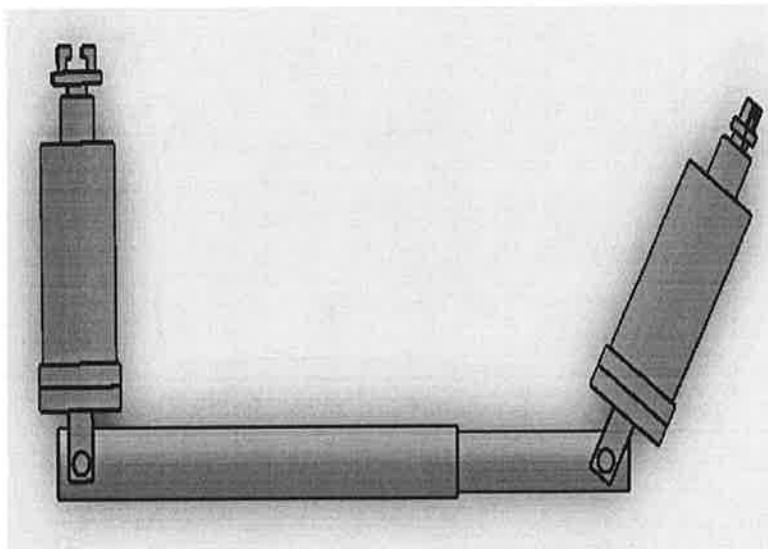


Figura 7.9. Condiciones iniciales del robot con torque 0, dónde Eslabón 1 = 0, Eslabón 2 =  $\pi/4$ , Eslabón 3 = 0.2, Eslabón 4 =  $\pi/5$ , Eslabón 5 =  $\pi/6$

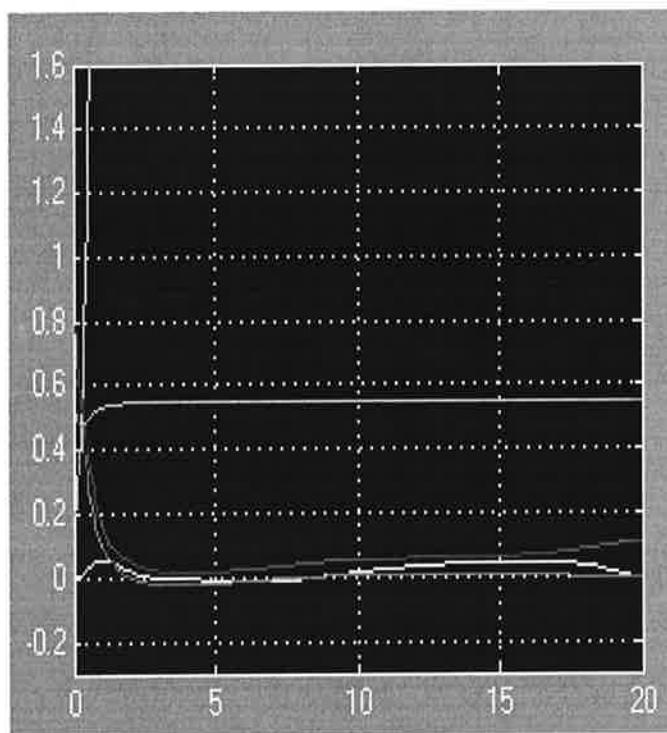


Figura 7.10. Grafica del comportamiento del robot con torque 0, dónde, Eslabón 1, [REDACTED], Eslabón 3, [REDACTED], [REDACTED].

## **8.- CONCLUSIONES**

La metodología que se uso para la cinemática del robot fue la adecuada.

Durante el desarrollo para calcular la matriz de inercia se encontraron 2 formas para desarrollar el Jacobiano, que son: a través de derivadas parciales y a través de producto cruz, aunque el resultado es el mismo, se escogió el método por medio del producto cruz, ya que fue la manera más fácil de realizar los cálculos.

Se hizo la comprobación del modelo dinámico para un torque de 0, con lo cual se observa en la gráfica que el análisis cinemático fue correcto y cómo trabajo posterior se podrá considerar aplicar un torque diferente de 0.

Para solucionar el problema de la cinemática inversa fue haciendo una relación entre las matrices de transformación, la matriz de transformación de 1 a 3 con la matriz de transformación de 4 a 5, relacionando sus matrices de rotación igualando los valores donde aparecen incógnitas ( $q_4$  y  $q_5$ ) donde haya valores conocidos ( $q_1$ ,  $q_2$  ó  $q_3$ ).

## **9.- BIOGRAFIA**

- [1] SPONG, M et al. Robot Modeling and Control. John Weley and son, Inc.
- [2] KELLY, R. Control Of Robot Manipulator In Joint Space. British Library.
- [3] REYES, J. Cinemática y Dinámica Del Manipulador Industrial Robótico Hidráulico, IPN
- [4] R. Santibáñez V, Control de Movimiento de Robots Manipuladores, Pearson Educación.

## 10.- ANEXO

### Desarrollo matemático del modelo

$$A1 := \begin{bmatrix} \cos(q1) & 0 & -\sin(q1) & 0 \\ \sin(q1) & 0 & \cos(q1) & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (10.1)$$

$$A2 := \begin{bmatrix} \cos(q2) & 0 & -\sin(q2) & 0 \\ \sin(q2) & 0 & \cos(q2) & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (10.2)$$

$$A3 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & q(3) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (10.3)$$

$$A4 := \begin{bmatrix} \cos(q4) & 0 & -\sin(q4) & 0 \\ \sin(q4) & 0 & \cos(q4) & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (10.4)$$

$$A5 := \begin{bmatrix} \cos(q5) & -\sin(q5) & 0 & 0 \\ \sin(q5) & -\cos(q5) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & d5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (10.5)$$

$$\begin{aligned}
T(0, 5) := A1 \cdot A2 \cdot A3 \cdot A4 \cdot A5 = & [[(\cos(q1) \cos(q2) \cos(q4) \\
& - \cos(q1) \sin(q2) \sin(q4)) \cos(q5) + \sin(q1) \sin(q5), \\
& -(\cos(q1) \cos(q2) \cos(q4) - \cos(q1) \sin(q2) \sin(q4)) \sin(q5) \\
& - \sin(q1) \cos(q5), \cos(q1) \cos(q2) \sin(q4) \\
& + \cos(q1) \sin(q2) \cos(q4), (-\cos(q1) \cos(q2) \sin(q4) \\
& - \cos(q1) \sin(q2) \cos(q4)) d5 - \cos(q1) \sin(q2) q(3)], \\
& [(\sin(q1) \cos(q2) \cos(q4) - \sin(q1) \sin(q2) \sin(q4)) \cos(q5) \\
& - \cos(q1) \sin(q5), -(\sin(q1) \cos(q2) \cos(q4) \\
& - \sin(q1) \sin(q2) \sin(q4)) \sin(q5) + \cos(q1) \cos(q5), \\
& \sin(q1) \cos(q2) \sin(q4) + \sin(q1) \sin(q2) \cos(q4), \\
& -\sin(q1) \cos(q2) \sin(q4) - \sin(q1) \sin(q2) \cos(q4)) d5 \\
& - \sin(q1) \sin(q2) q(3)], \\
& [(-\sin(q2) \cos(q4) - \cos(q2) \sin(q4)) \cos(q5), - \\
& -\sin(q2) \cos(q4) - \cos(q2) \sin(q4)) \sin(q5), -\sin(q2) \sin(q4) \\
& + \cos(q2) \cos(q4), (\sin(q2) \sin(q4) - \cos(q2) \cos(q4)) d5 \\
& - \cos(q2) q(3) + d1], \\
& [0, 0, 0, 1]]
\end{aligned} \tag{10.6}$$

$$\begin{aligned}
rot(4, 5) := & \text{combine}(rot(0, 4).rot(0, 5)); \\
& \left[ \left[ \frac{1}{2} \cos(q4 - q5) + \frac{1}{2} \cos(q4 + q5), -\frac{1}{2} \sin(q4 + q5) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{1}{2} \sin(q4 - q5), \sin(q4) \right], \\
& \left[ \frac{1}{2} \sin(q4 + q5) + \frac{1}{2} \sin(q4 - q5), -\frac{1}{2} \cos(q4 - q5) \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{2} \cos(q4 + q5), -\cos(q4) \right], \\
& \left[ \sin(q5), \cos(q5), 0 \right] \right]
\end{aligned} \tag{10.7}$$

$$\begin{aligned}
rot(1, 3) := & rot(0, 1).rot(1, 2).rot(0, 3) \\
& \left[ \begin{array}{ccc} \cos(q1) \cos(q2) & -\cos(q1) \sin(q2) & \sin(q1) \\ \sin(q1) \cos(q2) & -\sin(q1) \sin(q2) & -\cos(q1) \\ \sin(q2) & \cos(q2) & 0 \end{array} \right]
\end{aligned} \tag{10.8}$$

$z1 := \langle\langle T1[1, 3], T1[2, 3], T1[3, 3] \rangle\rangle;$

$$\begin{bmatrix} \sin(q1) \\ -\cos(q1) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (10.9)$$

$z2 := \langle\langle T2[1, 3], T2[2, 3], T2[3, 3] \rangle\rangle;$

$$\begin{bmatrix} \cos(q1) \sin(q2) \\ \sin(q1) \sin(q2) \\ -\cos(q2) \end{bmatrix} \quad (10.10)$$

$z3 := \langle\langle T3[1, 3], T3[2, 3], T3[3, 3] \rangle\rangle;$

$$\begin{bmatrix} \sin(q1) \\ -\cos(q1) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (10.11)$$

$z4 := \langle\langle T4[1, 3], T4[2, 3], T4[3, 3] \rangle\rangle;$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \sin(q1 + q2 + q4) - \frac{1}{2} \sin(q1 - q2 - q4) \\ \frac{1}{2} \cos(q1 - q2 - q4) - \frac{1}{2} \cos(q1 + q2 + q4) \\ -\cos(q2 + q4) \end{bmatrix} \quad (10.12)$$

$P(0, 1) := \langle\langle T1[1, 4], T1[2, 4], T1[3, 4] \rangle\rangle;$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d_1 \end{bmatrix} \quad (10.13)$$

$P(0, 2) := \text{simplify}(\langle\langle T2[1, 4], T2[2, 4], T2[3, 4] \rangle\rangle);$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d_1 \end{bmatrix} \quad (10.14)$$

$P(0, 3) := \text{simplify}(\langle\langle T3[1, 4], T3[2, 4], T3[3, 4] \rangle\rangle);$

$$\left[ \begin{array}{c} \frac{1}{2} q3 (\sin(q1 + q2) - \sin(q1 - q2)) \\ \frac{1}{2} q3 (\cos(q1 - q2) - \cos(q1 + q2)) \\ -\cos(q2) q3 + d_1 \end{array} \right] \quad (10.15)$$

$P(0, 4) := \text{simplify}(\langle\langle T4[1, 4], T4[2, 4], T4[3, 4] \rangle\rangle);$

$$\left[ \begin{array}{c} \frac{1}{2} q3 (\sin(q1 + q2) - \sin(q1 - q2)) \\ \frac{1}{2} q3 (\cos(q1 - q2) - \cos(q1 + q2)) \\ -\cos(q2) q3 + d_1 \end{array} \right] \quad (10.16)$$

$P(0, 5) := \text{simplify}(\langle\langle T5[1, 4], T5[2, 4], T5[3, 4] \rangle\rangle);$

$$\begin{aligned} & \left[ \left[ \frac{1}{2} d_5 \sin(q1 + q2 + q4) - \frac{1}{2} d_5 \sin(q1 - q2 - q4) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{1}{2} q3 \sin(q1 + q2) - \frac{1}{2} q3 \sin(q1 - q2) \right], \right. \\ & \left[ \frac{1}{2} d_5 \cos(q1 - q2 - q4) - \frac{1}{2} d_5 \cos(q1 + q2 + q4) \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2} q3 \cos(q1 - q2) - \frac{1}{2} q3 \cos(q1 + q2) \right], \\ & \left. \left[ -d_5 \cos(q2 + q4) - \cos(q2) q3 + d_1 \right] \right] \end{aligned} \quad (10.17)$$

$JvI := \langle\langle Jv(1, 1) \rangle|\langle cero \rangle|\langle cero \rangle|\langle cero \rangle|\langle cero \rangle\rangle$

$$\left[ \begin{array}{cccccc} -\sin(q1) lcIx + \cos(q1) lcIz & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cos(q1) lcIx + \sin(q1) lcIz & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (10.18)$$

$$\begin{aligned}
Jv2 := & \langle Jv(1, 2) \rangle | \langle Jv(2, 2) \rangle | \langle cero \rangle | \langle cero \rangle | \langle cero \rangle \\
& [[-\sin(q1) \cos(q2) lc2x + \cos(q1) lc2y - \sin(q1) \sin(q2) lc2z, \\
& \quad -\cos(q1) (\sin(q2) lc2x - \cos(q2) lc2z), 0, 0, 0], \\
& [\cos(q1) \cos(q2) lc2x + \sin(q1) lc2y + \cos(q1) \sin(q2) lc2z, \\
& \quad -\sin(q1) (\sin(q2) lc2x - \cos(q2) lc2z), 0, 0, 0], \\
& [0, \cos(q2) lc2x + \sin(q2) lc2z, 0, 0, 0]]
\end{aligned} \tag{10.19}$$

$$\begin{aligned}
Jv3 := & \langle Jv(1, 3) \rangle | \langle Jv(2, 3) \rangle | \langle Jv(3, 3) \rangle | \langle cero \rangle | \langle cero \rangle \\
& [[-\frac{1}{2} lc3x \sin(q1 + q2) - \frac{1}{2} lc3x \sin(q1 - q2) + \frac{1}{2} lc3y \cos(q1 - q2) - \frac{1}{2} lc3y \cos(q1 + q2) + \cos(q1) lc3z \\
& \quad - \frac{1}{2} q3 \cos(q1 - q2) + \frac{1}{2} q3 \cos(q1 + q2), [\cos(q1) (-\sin(q2) lc3x - \cos(q2) lc3y + \cos(q2) q3)], \\
& \quad \cos(q1) \sin(q2), 0, 0], \\
& [\frac{1}{2} lc3x \cos(q1 - q2) + \frac{1}{2} lc3x \cos(q1 + q2) - \frac{1}{2} lc3y \sin(q1 + q2) + \frac{1}{2} lc3y \sin(q1 - q2) + \sin(q1) lc3z \\
& \quad + \frac{1}{2} q3 \sin(q1 + q2) - \frac{1}{2} q3 \sin(q1 - q2), [\sin(q1) (-\sin(q2) lc3x - \cos(q2) lc3y + \cos(q2) q3)], \\
& \quad \sin(q1) \sin(q2), 0, 0], \\
& [0, \left[ \frac{1}{2} \sin(q1) lc3x \sin(q1 + q2) + \frac{1}{2} \sin(q1) lc3x \sin(q1 - q2) - \frac{1}{2} \sin(q1) lc3y \cos(q1 - q2) \right. \\
& \quad + \frac{1}{2} \sin(q1) lc3y \cos(q1 + q2) + \frac{1}{2} \sin(q1) q3 \cos(q1 - q2) - \frac{1}{2} \sin(q1) q3 \cos(q1 + q2) \\
& \quad + \frac{1}{2} \cos(q1) lc3x \cos(q1 - q2) + \frac{1}{2} \cos(q1) lc3x \cos(q1 + q2) - \frac{1}{2} \cos(q1) lc3y \sin(q1 + q2) \\
& \quad \left. + \frac{1}{2} \cos(q1) lc3y \sin(q1 - q2) + \frac{1}{2} \cos(q1) q3 \sin(q1 + q2) - \frac{1}{2} \cos(q1) q3 \sin(q1 - q2) \right], -\cos(q2), 0, 0]
\end{aligned} \tag{10.20}$$

$$Jv4 := \langle\langle Jv(1, 4)\rangle|\langle Jv(2, 4)\rangle|\langle Jv(3, 4)\rangle|\langle Jv(4, 4)\rangle|\langle ceros\rangle\rangle$$

$$\begin{aligned} & \left[ \left[ -\frac{1}{2} lc4x \sin(q1 + q2 + q4) - \frac{1}{2} lc4x \sin(q1 - q2 - q4) + \cos(q1) lc4y - \frac{1}{2} lc4z \cos(q1 - q2 - q4) \right. \right. \\ & + \frac{1}{2} lc4z \cos(q1 + q2 + q4) - \frac{1}{2} q3 \cos(q1 - q2) + \frac{1}{2} q3 \cos(q1 + q2), \cos(q1) (-\sin(q2 + q4)) lc4x \\ & + \cos(q2 + q4) lc4z + \cos(q2) q3, \left. \left[ \sin(q1) \sin(q2) \sin(q2 + q4) lc4x - \sin(q1) \sin(q2) \cos(q2 + q4) lc4z \right. \right. \\ & - \sin(q1) \sin(q2) \cos(q2) q3 + \frac{1}{2} \cos(q2) lc4x \sin(q1 + q2 + q4) + \frac{1}{2} \cos(q2) lc4x \sin(q1 - q2 - q4) \\ & - \cos(q2) \cos(q1) lc4y + \frac{1}{2} \cos(q2) lc4z \cos(q1 - q2 - q4) - \frac{1}{2} \cos(q2) lc4z \cos(q1 + q2 + q4) \\ & + \frac{1}{2} \cos(q2) q3 \cos(q1 - q2) - \frac{1}{2} \cos(q2) q3 \cos(q1 + q2) \right], -\cos(q1) (\sin(q2 + q4)) lc4x - \cos(q2 \\ & + q4) lc4z, 0 \Big], \\ & \left[ \frac{1}{2} lc4x \cos(q1 - q2 - q4) + \frac{1}{2} lc4x \cos(q1 + q2 + q4) + \sin(q1) lc4y + \frac{1}{2} lc4z \sin(q1 + q2 + q4) \right. \\ & - \frac{1}{2} lc4z \sin(q1 - q2 - q4) + \frac{1}{2} q3 \sin(q1 + q2) - \frac{1}{2} q3 \sin(q1 - q2), \sin(q1) (-\sin(q2 + q4)) lc4x + \cos(q2 \\ & + q4) lc4z + \cos(q2) q3, \left[ -\frac{1}{2} \cos(q2) lc4x \cos(q1 - q2 - q4) - \frac{1}{2} \cos(q2) lc4x \cos(q1 + q2 + q4) \right. \\ & - \cos(q2) \sin(q1) lc4y - \frac{1}{2} \cos(q2) lc4z \sin(q1 + q2 + q4) + \frac{1}{2} \cos(q2) lc4z \sin(q1 - q2 - q4) \\ & - \frac{1}{2} \cos(q2) q3 \sin(q1 + q2) + \frac{1}{2} \cos(q2) q3 \sin(q1 - q2) - \cos(q1) \sin(q2) \sin(q2 + q4) lc4x \\ & + \cos(q1) \sin(q2) \cos(q2 + q4) lc4z + \cos(q1) \sin(q2) \cos(q2) q3 \Big], -\sin(q1) (\sin(q2 + q4)) lc4x - \cos(q2 \\ & + q4) lc4z, 0 \Big], \\ & \left[ 0, \frac{1}{2} \sin(q1) lc4x \sin(q1 + q2 + q4) + \frac{1}{2} \sin(q1) lc4x \sin(q1 - q2 - q4) + \frac{1}{2} \sin(q1) lc4z \cos(q1 - q2 - q4) \right. \\ & - \frac{1}{2} \sin(q1) lc4z \cos(q1 + q2 + q4) + \frac{1}{2} \sin(q1) q3 \cos(q1 - q2) - \frac{1}{2} \sin(q1) q3 \cos(q1 + q2) \\ & + \frac{1}{2} \cos(q1) lc4x \cos(q1 - q2 - q4) + \frac{1}{2} \cos(q1) lc4x \cos(q1 + q2 + q4) + \frac{1}{2} \cos(q1) lc4z \sin(q1 + q2 \\ & + q4) - \frac{1}{2} \cos(q1) lc4z \sin(q1 - q2 - q4) + \frac{1}{2} \cos(q1) q3 \sin(q1 + q2) - \frac{1}{2} \cos(q1) q3 \sin(q1 - q2), \Big] \\ & - \frac{1}{2} \sin(q2) (-\cos(q1) lc4x \sin(q1 + q2 + q4) - \cos(q1) lc4x \sin(q1 - q2 - q4) - \cos(q1) lc4z \cos(q1 - q2 \\ & - q4) + \cos(q1) lc4z \cos(q1 + q2 + q4) - \cos(q1) q3 \cos(q1 - q2) + \cos(q1) q3 \cos(q1 + q2) \\ & + \sin(q1) lc4x \cos(q1 - q2 - q4) + \sin(q1) lc4x \cos(q1 + q2 + q4) + 2 lc4y + \sin(q1) lc4z \sin(q1 + q2 + q4) \\ & - \sin(q1) lc4z \sin(q1 - q2 - q4) + \sin(q1) q3 \sin(q1 + q2) - \sin(q1) q3 \sin(q1 - q2)), \frac{1}{2} \sin(q1) lc4x \sin(q1 \\ & + q2 + q4) + \frac{1}{2} \sin(q1) lc4x \sin(q1 - q2 - q4) + \frac{1}{2} \sin(q1) lc4z \cos(q1 - q2 - q4) - \frac{1}{2} \sin(q1) lc4z \cos(q1 \\ & + q2 + q4) + \frac{1}{2} \cos(q1) lc4x \cos(q1 - q2 - q4) + \frac{1}{2} \cos(q1) lc4x \cos(q1 + q2 + q4) \\ & + \frac{1}{2} \cos(q1) lc4z \sin(q1 + q2 + q4) - \frac{1}{2} \cos(q1) lc4z \sin(q1 - q2 - q4), 0 \Big] \end{aligned}$$

(10.21)

$$Jv5 := \langle\langle Jv(1, 5)\rangle|\langle Jv(2, 5)\rangle|\langle Jv(3, 5)\rangle|\langle Jv(4, 5)\rangle|\langle Jv(5, 5)\rangle\rangle$$

$$\begin{aligned} & \left[ \left[ -\frac{1}{4} lc5x \sin(q1 + q5 + q2 + q4) - \frac{1}{4} lc5x \sin(q1 + q5 - q2 - q4) - \frac{1}{4} lc5x \sin(q1 - q5 + q2 + q4) \right. \right. \\ & - \frac{1}{4} lc5x \sin(q1 - q5 - q2 - q4) + \frac{1}{2} lc5x \sin(q1 + q5) - \frac{1}{2} lc5x \sin(q1 - q5) + \frac{1}{4} lc5y \cos(q1 - q5 - q2 \\ & - q4) + \frac{1}{4} lc5y \cos(q1 - q5 + q2 + q4) - \frac{1}{4} lc5y \cos(q1 + q5 - q2 - q4) - \frac{1}{4} lc5y \cos(q1 + q5 + q2 \\ & + q4) + \frac{1}{2} lc5y \cos(q1 - q5) + \frac{1}{2} lc5y \cos(q1 + q5) - \frac{1}{2} lc5z \cos(q1 - q2 - q4) + \frac{1}{2} lc5z \cos(q1 + q2 \\ & + q4) - \frac{1}{2} d5 \cos(q1 - q2 - q4) + \frac{1}{2} d5 \cos(q1 + q2 + q4) - \frac{1}{2} q3 \cos(q1 - q2) + \frac{1}{2} q3 \cos(q1 + q2), \\ & \left. \left. \frac{1}{2} \cos(q1) (-lc5x \sin(q2 + q4 + q5) - lc5x \sin(q2 + q4 - q5) + lc5y \cos(q2 + q4 - q5) - lc5y \cos(q2 + q4 \\ & + q5) + 2 \cos(q2 + q4) lc5z + 2 d5 \cos(q2 + q4) + 2 \cos(q2) q3), \left[ -\frac{1}{2} \sin(q1) \sin(q2) lc5y \cos(q2 + q4 - q5) \right. \right. \\ & + \frac{1}{4} \cos(q2) lc5x \sin(q1 - q5 + q2 + q4) - \frac{1}{2} \cos(q2) lc5y \cos(q1 + q5) - \frac{1}{2} \cos(q2) lc5x \sin(q1 + q5) \\ & - \frac{1}{2} \cos(q2) lc5z \cos(q1 + q2 + q4) - \frac{1}{4} \cos(q2) lc5y \cos(q1 - q5 + q2 + q4) \\ & + \frac{1}{2} \sin(q1) \sin(q2) lc5x \sin(q2 + q4 - q5) - \frac{1}{2} \cos(q2) q3 \cos(q1 + q2) - \frac{1}{2} \cos(q2) lc5y \cos(q1 - q5) \\ & - \sin(q1) \sin(q2) \cos(q2) q3 + \frac{1}{2} \cos(q2) lc5z \cos(q1 - q2 - q4) - \frac{1}{4} \cos(q2) lc5y \cos(q1 - q5 - q2 - q4) \\ & + \frac{1}{4} \cos(q2) lc5x \sin(q1 + q5 - q2 - q4) + \frac{1}{4} \cos(q2) lc5y \cos(q1 + q5 - q2 - q4) - \sin(q1) \sin(q2) \cos(q2 \\ & + q4) lc5z - \sin(q1) \sin(q2) d5 \cos(q2 + q4) + \frac{1}{4} \cos(q2) lc5x \sin(q1 + q5 + q2 + q4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{4} \cos(q2) lc5y \cos(q1 + q5 + q2 + q4) + \frac{1}{2} \cos(q2) q3 \cos(q1 - q2) + \frac{1}{4} \cos(q2) lc5x \sin(q1 - q5 - q2 \\
& - q4) + \frac{1}{2} \sin(q1) \sin(q2) lc5y \cos(q2 + q4 + q5) + \frac{1}{2} \cos(q2) d5 \cos(q1 - q2 - q4) \\
& + \frac{1}{2} \cos(q2) lc5x \sin(q1 - q5) - \frac{1}{2} \cos(q2) d5 \cos(q1 + q2 + q4) + \frac{1}{2} \sin(q1) \sin(q2) lc5x \sin(q2 + q4 \\
& + q5) \Big|, \Big| \frac{1}{2} \cos(q1) (-lc5x \sin(q2 + q4 + q5) - lc5x \sin(q2 + q4 - q5) + lc5y \cos(q2 + q4 - q5) \\
& - lc5y \cos(q2 + q4 + q5) + 2 \cos(q2 + q4) lc5z + 2 d5 \cos(q2 + q4)) \Big|, \Big| \frac{1}{4} \cos(q2 + q4) lc5x \sin(q1 - q5 \\
& - q2 - q4) - \frac{1}{2} \cos(q2 + q4) lc5y \cos(q1 - q5) - \frac{1}{4} \cos(q1 + q2 + q4) lc5y \cos(q2 + q4 + q5) - \frac{1}{4} \cos(q1 \\
& - q2 - q4) lc5y \cos(q2 + q4 - q5) + \frac{1}{4} \cos(q2 + q4) lc5x \sin(q1 - q5 + q2 + q4) + \frac{1}{4} \cos(q2 \\
& + q4) lc5x \sin(q1 + q5 + q2 + q4) + \frac{1}{2} \cos(q2 + q4) lc5x \sin(q1 - q5) + \frac{1}{4} \cos(q1 - q2 - q4) lc5y \cos(q2 \\
& + q4 + q5) + \frac{1}{4} \cos(q1 - q2 - q4) lc5x \sin(q2 + q4 - q5) - \frac{1}{2} \cos(q2 + q4) lc5y \cos(q1 + q5) + \frac{1}{4} \cos(q2 \\
& + q4) lc5x \sin(q1 + q5 - q2 - q4) - \frac{1}{4} \cos(q1 + q2 + q4) lc5x \sin(q2 + q4 - q5) + \frac{1}{4} \cos(q2 \\
& + q4) lc5y \cos(\theta1 + \theta5 + \theta2 + \theta4) + \frac{1}{4} \cos(q1 + q2 + q4) lc5y \cos(q2 + q4 - q5) - \frac{1}{2} \cos(q2 \\
& + q4) lc5x \sin(q1 + q5) - \frac{1}{4} \cos(q2 + q4) lc5y \cos(q1 - q5 - q2 - q4) + \frac{1}{4} \cos(q1 - q2 - q4) lc5x \sin(q2 \\
& + q4 + q5) - \frac{1}{4} \cos(q1 + q2 + q4) lc5x \sin(q2 + q4 + q5) \Big|, \\
& \Big| \frac{1}{4} lc5x \cos(q1 - q5 - q2 - q4) + \frac{1}{4} lc5x \cos(q1 - q5 + q2 + q4) + \frac{1}{4} lc5x \cos(q1 + q5 - q2 - q4) \\
& + \frac{1}{4} lc5x \cos(q1 + q5 + q2 + q4) + \frac{1}{2} lc5x \cos(q1 - q5) - \frac{1}{2} lc5x \cos(q1 + q5) - \frac{1}{4} lc5y \sin(q1 + q5 + q2 \\
& + q4) - \frac{1}{4} lc5y \sin(q1 + q5 - q2 - q4) + \frac{1}{4} lc5y \sin(q1 - q5 + q2 + q4) + \frac{1}{4} lc5y \sin(q1 - q5 - q2 - q4) \\
& + \frac{1}{2} lc5y \sin(q1 + q5) + \frac{1}{2} lc5y \sin(q1 - q5) + \frac{1}{2} lc5z \sin(q1 + q2 + q4) - \frac{1}{2} lc5z \sin(q1 - q2 - q4) \\
& + \frac{1}{2} d5 \sin(q1 + q2 + q4) - \frac{1}{2} d5 \sin(q1 - q2 - q4) + \frac{1}{2} q3 \sin(q1 + q2) - \frac{1}{2} q3 \sin(q1 - q2), \frac{1}{2} \sin(q1) (- \\
& - lc5x \sin(q2 + q4 + q5) - lc5x \sin(q2 + q4 - q5) + lc5y \cos(q2 + q4 - q5) - lc5y \cos(q2 + q4 + q5) \\
& + 2 \cos(q2 + q4) lc5z + 2 d5 \cos(q2 + q4) + 2 \cos(q2) q3), \Big| \cos(q1) \sin(q2) \cos(q2 + q4) lc5z \\
& + \frac{1}{2} \cos(q1) \sin(q2) lc5y \cos(q2 + q4 - q5) - \frac{1}{2} \cos(q1) \sin(q2) lc5y \cos(q2 + q4 + q5) \\
& - \frac{1}{2} \cos(q1) \sin(q2) lc5x \sin(q2 + q4 + q5) - \frac{1}{2} \cos(q1) \sin(q2) lc5x \sin(q2 + q4 - q5) \\
& - \frac{1}{2} \cos(q2) lc5z \sin(q1 + q2 + q4) - \frac{1}{4} \cos(q2) lc5x \cos(q1 - q5 + q2 + q4) + \frac{1}{4} \cos(q2) lc5y \sin(q1 + q5 \\
& - q2 - q4) - \frac{1}{4} \cos(q2) lc5x \cos(q1 - q5 - q2 - q4) - \frac{1}{4} \cos(q2) lc5x \cos(q1 + q5 + q2 + q4) \\
& + \frac{1}{4} \cos(q2) lc5y \sin(q1 + q5 + q2 + q4) - \frac{1}{2} \cos(q2) lc5x \cos(q1 - q5) + \frac{1}{2} \cos(q2) d5 \sin(q1 - q2 - q4) \\
& - \frac{1}{2} \cos(q2) d5 \sin(q1 + q2 + q4) - \frac{1}{4} \cos(q2) lc5y \sin(q1 - q5 + q2 + q4) - \frac{1}{2} \cos(q2) lc5y \sin(q1 + q5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{4} \cos(q2) lc5y \sin(q1 - q5 - q2 - q4) - \frac{1}{2} \cos(q2) lc5y \sin(q1 - q5) - \frac{1}{4} \cos(q2) lc5x \cos(q1 + q5 - q2 \\
& - q4) + \frac{1}{2} \cos(q2) lc5x \cos(q1 + q5) + \frac{1}{2} \cos(q2) lc5z \sin(q1 - q2 - q4) + \cos(q1) \sin(q2) d5 \cos(q2 + q4) \\
& - \frac{1}{2} \cos(q2) q3 \sin(q1 + q2) + \frac{1}{2} \cos(q2) q3 \sin(q1 - q2) + \cos(q1) \sin(q2) \cos(q2) q3, \left| \frac{1}{2} \sin(q1) \right. \\
& - lc5x \sin(q2 + q4 + q5) - lc5x \sin(q2 + q4 - q5) + lc5y \cos(q2 + q4 - q5) - lc5y \cos(q2 + q4 + q5) \\
& + 2 \cos(q2 + q4) lc5z + 2 d5 \cos(q2 + q4) \}, \left| -\frac{1}{4} \sin(q1 + q2 + q4) lc5x \sin(q2 + q4 - q5) + \frac{1}{4} \sin(q1 + q2 \right. \\
& + q4) lc5y \cos(q2 + q4 - q5) - \frac{1}{4} \sin(q1 + q2 + q4) lc5y \cos(q2 + q4 + q5) + \frac{1}{4} \sin(q1 - q2 \\
& - q4) lc5x \sin(q2 + q4 + q5) + \frac{1}{4} \sin(q1 - q2 - q4) lc5x \sin(q2 + q4 - q5) - \frac{1}{4} \sin(q1 - q2 \\
& - q4) lc5y \cos(q2 + q4 - q5) + \frac{1}{4} \sin(q1 - q2 - q4) lc5y \cos(q2 + q4 + q5) - \frac{1}{4} \cos(q2 + q4) lc5x \cos(q1 \\
& - q5 - q2 - q4) - \frac{1}{4} \cos(q2 + q4) lc5x \cos(q1 - q5 + q2 + q4) - \frac{1}{4} \cos(q2 + q4) lc5x \cos(q1 + q5 - q2 \\
& - q4) - \frac{1}{4} \cos(q2 + q4) lc5x \cos(q1 + q5 + q2 + q4) - \frac{1}{2} \cos(q2 + q4) lc5x \cos(q1 - q5) + \frac{1}{2} \cos(q2 \\
& + q4) lc5x \cos(q1 + q5) + \frac{1}{4} \cos(q2 + q4) lc5y \sin(q1 + q5 + q2 + q4) + \frac{1}{4} \cos(q2 + q4) lc5y \sin(q1 + q5 \\
& - q2 - q4) - \frac{1}{4} \cos(q2 + q4) lc5y \sin(q1 - q5 + q2 + q4) - \frac{1}{4} \cos(q2 + q4) lc5y \sin(q1 - q5 - q2 - q4) \\
& - \frac{1}{2} \cos(q2 + q4) lc5y \sin(q1 + q5) - \frac{1}{2} \cos(q2 + q4) lc5y \sin(q1 - q5) - \frac{1}{4} \sin(q1 + q2 + q4) lc5x \sin(q2 \\
& + q4 + q5) \} \Bigg] \\
& \left[ 0, \frac{1}{4} \cos(q1) lc5x \cos(q1 + q5 + q2 + q4) - \frac{1}{2} \sin(q1) lc5z \cos(q2 + q4 + q5) - \frac{1}{2} \sin(q1) lc5y \cos(q1 - q5) \right. \\
& + \frac{1}{4} \cos(q1) lc5y \sin(q1 - q5 + q2 + q4) + \frac{1}{2} \cos(q1) q3 \sin(q1 + q2) - \frac{1}{2} \sin(q1) lc5x \sin(q1 + q5) \\
& - \frac{1}{2} \sin(q1) d5 \cos(q1 + q2 + q4) + \frac{1}{2} \sin(q1) lc5x \sin(q1 - q5) + \frac{1}{2} \cos(q1) d5 \sin(\theta1 + \theta2 + \theta4) \\
& - \frac{1}{4} \sin(q1) lc5y \cos(q1 - q5 + q2 + q4) + \frac{1}{4} \sin(q1) lc5x \sin(q1 - q5 + q2 + q4) + \frac{1}{2} \cos(q1) lc5z \sin(q1 \\
& + q2 + q4) + \frac{1}{4} \cos(q1) lc5x \cos(q1 - q5 + q2 + q4) + \frac{1}{2} \cos(q1) lc5x \cos(q1 - q5) \\
& + \frac{1}{4} \sin(q1) lc5x \sin(q1 + q5 + q2 + q4) + \frac{1}{4} \sin(q1) lc5y \cos(q1 + q5 + q2 + q4) - \frac{1}{2} \sin(q1) lc5y \cos(q1 \\
& + q5) - \frac{1}{2} \cos(q1) lc5z \sin(q1 - q2 - q4) + \frac{1}{4} \sin(q1) lc5x \sin(q1 + q5 - q2 - q4) + \frac{1}{2} \cos(q1) lc5y \sin(q1 \\
& - q5) + \frac{1}{2} \cos(q1) lc5y \sin(q1 + q5) - \frac{1}{4} \cos(q1) lc5y \sin(q1 + q5 + q2 + q4) - \frac{1}{2} \cos(q1) lc5x \cos(q1 \\
& + q5) - \frac{1}{2} \cos(q1) d5 \sin(q1 - q2 - q4) + \frac{1}{4} \cos(q1) lc5y \sin(q1 - q5 - q2 - q4) + \frac{1}{4} \sin(q1) lc5x \sin(q1 \\
& - q5 - \theta2 - \theta4) + \frac{1}{2} \sin(q1) q3 \cos(q1 - q2) + \frac{1}{2} \sin(q1) lc5z \cos(q1 - q2 - q4) + \frac{1}{4} \sin(q1) lc5y \cos(q1 \\
& + q5 - q2 - q4) - \frac{1}{2} \sin(q1) q3 \cos(q1 + q2) - \frac{1}{4} \sin(q1) lc5y \cos(q1 - q5 - q2 - q4) \\
& - \frac{1}{4} \cos(q1) lc5y \sin(q1 + q5 - q2 - q4) + \frac{1}{4} \cos(q1) lc5x \cos(q1 + q5 - q2 - q4) + \frac{1}{4} \cos(q1) lc5x \cos(q1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -q5 - q2 - q4) + \frac{1}{2} \sin(qI) d_5 \cos(qI - q2 - q4) - \frac{1}{2} \cos(qI) q3 \sin(qI - q2), \left[ \frac{1}{4} \sin(q2) ( \right. \\
& -\sin(qI) lc5x \cos(qI - q5 + q2 + q4) - \cos(qI) lc5y \cos(qI - q5 - q2 - q4) - \cos(qI) lc5y \cos(qI - q5 + q2 \\
& + q4) + \cos(qI) lc5x \sin(qI + q5 + q2 + q4) - \sin(qI) lc5x \cos(qI + q5 - q2 - q4) + \cos(qI) lc5x \sin(qI \\
& - q5 - q2 - q4) + \cos(qI) lc5x \sin(qI + q5 - q2 - q4) + \cos(qI) lc5y \cos(qI + q5 - q2 - q4) \\
& + \sin(qI) lc5y \sin(qI + q5 + q2 + q4) - 2 \sin(qI) lc5y \sin(qI + q5) - 2 \cos(qI) lc5y \cos(qI - q5) \\
& + 2 \cos(qI) d_5 \cos(qI - q2 - q4) + 2 \cos(qI) lc5x \sin(qI - q5) - 2 \sin(qI) lc5x \cos(qI - q5) \\
& + 2 \sin(qI) d_5 \sin(qI - q2 - q4) + 2 \sin(qI) lc5z \sin(qI - q2 - q4) + 2 \cos(qI) lc5z \cos(qI - q2 - q4) \\
& - 2 \sin(qI) lc5y \sin(qI - q5) - 2 \cos(qI) lc5x \sin(qI + q5) - 2 \cos(qI) lc5z \cos(qI + q2 + q4) \\
& - 2 \sin(qI) lc5z \sin(qI + q2 + q4) - 2 \cos(qI) d_5 \cos(qI + q2 + q4) - 2 \sin(qI) d_5 \sin(qI + q2 + q4) \\
& - 2 \cos(qI) lc5y \cos(qI + q5) + 2 \sin(qI) lc5x \cos(qI + q5) + \cos(qI) lc5y \cos(qI + q5 + q2 + q4) \\
& - 2 \sin(qI) q3 \sin(qI + q2) + \sin(qI) lc5y \sin(qI + q5 - q2 - q4) - \sin(qI) lc5y \sin(qI - q5 - q2 - q4) \\
& - 2 \cos(qI) q3 \cos(qI + q2) - \sin(qI) lc5x \cos(qI - q5 - q2 - q4) - \sin(qI) lc5x \cos(qI + q5 + q2 + q4) \\
& - \sin(qI) lc5y \sin(qI - q5 + q2 + q4) + \cos(qI) lc5x \sin(qI - q5 + q2 + q4) + 2 \sin(qI) q3 \sin(qI - q2) \\
& + 2 \cos(qI) q3 \cos(qI - q2) ) ] , \left[ \frac{1}{4} \cos(qI) lc5x \cos(qI + q5 + q2 + q4) - \frac{1}{2} \sin(qI) lc5y \cos(qI - q5) \right. \\
& + \frac{1}{4} \cos(qI) lc5y \sin(qI - q5 + q2 + q4) - \frac{1}{2} \sin(qI) lc5x \sin(qI + q5) - \frac{1}{2} \sin(qI) d_5 \cos(qI + q2 + q4) \\
& + \frac{1}{2} \sin(qI) lc5x \sin(qI - q5) - \frac{1}{4} \sin(qI) lc5y \cos(qI - q5 + q2 + q4) + \frac{1}{2} \sin(qI) lc5x \sin(qI - q5 + q2 \\
& + q4) + \frac{1}{2} \cos(qI) lc5z \sin(qI + q2 + q4) + \frac{1}{4} \cos(qI) lc5x \cos(qI - q5 + q2 + q4) \\
& + \frac{1}{2} \cos(qI) lc5x \cos(qI - q5) + \frac{1}{4} \sin(qI) lc5x \sin(qI + q5 + q2 + q4) + \frac{1}{4} \sin(qI) lc5y \cos(qI + q5 + q2 \\
& + q4) - \frac{1}{2} \sin(qI) lc5y \cos(qI + q5) - \frac{1}{2} \cos(qI) lc5z \sin(qI - q2 - q4) + \frac{1}{4} \sin(qI) lc5x \sin(qI + q5 - q2 \\
& - q4) + \frac{1}{2} \cos(qI) lc5y \sin(qI - q5) + \frac{1}{2} \cos(qI) lc5y \sin(qI + q5) - \frac{1}{4} \cos(qI) lc5y \sin(qI + q5 + q2 \\
& + q4) - \frac{1}{2} \cos(qI) lc5x \cos(qI + q5) - \frac{1}{2} \cos(qI) d_5 \sin(qI - q2 - q4) + \frac{1}{2} \sin(qI) lc5z \cos(qI - q2 - q4) \\
& + \frac{1}{4} \sin(qI) lc5y \cos(qI + q5 - q2 - q4) - \frac{1}{4} \sin(qI) lc5y \cos(qI - q5 - q2 - q4) - \frac{1}{4} \cos(qI) lc5y \sin(qI \\
& + q5 - q2 - q4) + \frac{1}{4} \cos(qI) lc5x \cos(qI + q5 - q2 - q4) + \frac{1}{4} \cos(qI) lc5x \cos(qI - q5 - q2 - q4) \\
& + \frac{1}{2} \sin(qI) d_5 \cos(qI - q2 - q4) - \frac{1}{2} \sin(qI) lc5z \cos(qI + q2 + q4) + \frac{1}{2} \cos(qI) d_5 \sin(qI + q2 + q4) \\
& - \frac{1}{4} \cos(qI) lc5y \sin(-qI + q5 + q2 + q4) ] , \left[ \frac{1}{8} \sin(qI + q2 + q4) lc5y \cos(qI + q5 + q2 + q4) + \frac{1}{8} \cos(qI \right. \\
& \left. + q2 + q4) lc5x \cos(qI - q5 + q2 + q4) + \frac{1}{8} \sin(qI - q2 - q4) lc5y \cos(qI - q5 - q2 - q4) + \frac{1}{8} \cos(qI
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + q2 + q4) lc5x \cos(qI + q5 - q2 - q4) - \frac{1}{8} \sin(qI + q2 + q4) lc5y \cos(qI - q5 - q2 - q4) - \frac{1}{8} \sin(qI \\
& - q2 - q4) lc5x \sin(qI + q5 + q2 + q4) - \frac{1}{8} \sin(qI - q2 - q4) lc5y \cos(qI + q5 + q2 + q4) - \frac{1}{4} \cos(qI \\
& - q2 - q4) lc5x \cos(qI - q5) - \frac{1}{8} \cos(qI - q2 - q4) lc5x \cos(qI - q5 - q2 - q4) + \frac{1}{8} \cos(qI + q2 \\
& + q4) lc5x \cos(qI + q5 + q2 + q4) + \frac{1}{4} \sin(qI - q2 - q4) lc5x \sin(qI + q5) + \frac{1}{8} \sin(qI + q2 \\
& + q4) lc5x \sin(qI + q5 - q2 - q4) - \frac{1}{8} \sin(\thetaI - \theta2 - \theta4) lc5x \sin(qI + q5 - q2 - q4) + \frac{1}{4} \sin(qI - q2 \\
& - q4) lc5y \cos(qI + q5) + \frac{1}{4} \sin(qI - q2 - q4) lc5y \cos(qI - q5) - \frac{1}{4} \cos(qI + q2 + q4) lc5x \cos(qI + q5) \\
& + \frac{1}{8} \sin(qI - q2 - q4) lc5y \cos(qI - q5 + q2 + q4) + \frac{1}{8} \cos(qI + q2 + q4) lc5x \cos(qI - q5 - q2 - q4) \\
& - \frac{1}{8} \sin(qI - q2 - q4) lc5y \cos(qI + q5 - q2 - q4) - \frac{1}{8} \cos(qI + q2 + q4) lc5y \sin(qI + q5 + q2 + q4) \\
& + \frac{1}{4} \cos(qI + q2 + q4) lc5y \sin(qI - q5) + \frac{1}{8} \sin(qI + q2 + q4) lc5y \cos(qI + q5 - q2 - q4) - \frac{1}{8} \cos(qI \\
& - q2 - q4) lc5x \cos(qI + q5 - q2 - q4) + \frac{1}{4} \cos(qI - q2 - q4) lc5x \cos(qI + q5) + \frac{1}{8} \cos(qI - q2 \\
& - q4) lc5y \sin(qI + q5 + q2 + q4) + \frac{1}{8} \sin(qI + q2 + q4) lc5x \sin(qI - q5 - q2 - q4) - \frac{1}{8} \sin(qI - q2 \\
& - q4) lc5x \sin(qI - q5 - q2 - q4) - \frac{1}{4} \cos(qI - q2 - q4) lc5y \sin(qI - q5) + \frac{1}{8} \cos(qI + q2 \\
& + q4) lc5y \sin(qI - q5 - q2 - q4) + \frac{1}{8} \cos(qI + q2 + q4) lc5y \sin(qI - q5 + q2 + q4) - \frac{1}{8} \cos(qI - q2 \\
& - q4) lc5x \cos(qI - q5 + q2 + q4) - \frac{1}{8} \cos(qI - q2 - q4) lc5x \cos(qI + q5 + q2 + q4) - \frac{1}{8} \cos(qI + q2 \\
& + q4) lc5y \sin(qI + q5 - q2 - q4) - \frac{1}{4} \sin(qI - q2 - q4) lc5x \sin(qI - q5) - \frac{1}{8} \sin(qI - q2 \\
& - q4) lc5x \sin(qI - q5 + q2 + q4) + \frac{1}{4} \cos(qI + q2 + q4) lc5y \sin(qI + q5) + \frac{1}{4} \sin(qI + q2 \\
& + q4) lc5x \sin(qI - q5) - \frac{1}{4} \sin(qI + q2 + q4) lc5y \cos(qI + q5) - \frac{1}{4} \sin(qI + q2 + q4) lc5x \sin(qI + q5) \\
& - \frac{1}{4} \sin(qI + q2 + q4) lc5y \cos(qI - q5) - \frac{1}{8} \sin(qI + q2 + q4) lc5y \cos(qI - q5 + q2 + q4) + \frac{1}{8} \sin(qI \\
& + q2 + q4) lc5x \sin(qI + q5 + q2 + q4) + \frac{1}{8} \sin(qI + q2 + q4) lc5x \sin(qI - q5 + q2 + q4) - \frac{1}{8} \cos(qI \\
& - q2 - q4) lc5y \sin(qI - q5 + q2 + q4) + \frac{1}{8} \cos(qI - q2 - q4) lc5y \sin(qI + q5 - q2 - q4) - \frac{1}{4} \cos(qI \\
& - q2 - q4) lc5y \sin(qI + q5) - \frac{1}{8} \cos(qI - q2 - q4) lc5y \sin(qI - q5 - q2 - q4) + \frac{1}{4} \cos(qI + q2 \\
& + q4) lc5x \cos(qI - q5) \Big] \Big]
\end{aligned}$$

(10.22)

$$Jw1 := \langle\langle z0\rangle|\langle cero\rangle|\langle cero\rangle|\langle cero\rangle|\langle cero\rangle\rangle;$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (10.23)$$

$$Jw2 := \langle\langle z0\rangle|\langle z1\rangle|\langle cero\rangle|\langle cero\rangle|\langle cero\rangle\rangle;$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \sin(q1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos(q1) & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (10.24)$$

$$Jw3 := \langle\langle z0\rangle|\langle z1\rangle|\langle cero\rangle|\langle cero\rangle|\langle cero\rangle\rangle;$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \sin(q1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos(q1) & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

\*No existe Jw3, porque es prismático  
(10.25)

$$Jw4 := \langle\langle z0\rangle|\langle z1\rangle|\langle cero\rangle|\langle z3\rangle|\langle cero\rangle\rangle;$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \sin(q1) & 0 & \sin(q1) & 0 \\ 0 & -\cos(q1) & 0 & -\cos(q1) & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (10.26)$$

$$Jw5 := \langle\langle z0\rangle|\langle z1\rangle|\langle cero\rangle|\langle z3\rangle|\langle z4\rangle\rangle;$$

$$\begin{aligned} & \left[ \left[ 0, \sin(q1), 0, \sin(q1), \frac{1}{2} \sin(q1 + q2 + q4) - \frac{1}{2} \sin(q1 - q2 \right. \right. \\ & \left. \left. - q4) \right], \right. \\ & \left[ 0, -\cos(q1), 0, -\cos(q1), \frac{1}{2} \cos(q1 - q2 - q4) - \frac{1}{2} \cos(q1 \right. \\ & \left. + q2 + q4) \right], \\ & \left. \left[ 1, 0, 0, 0, -\cos(q2 + q4) \right] \right] \end{aligned} \quad (10.27)$$

$$masa1 := m1 \quad (10.28)$$

$$masa2 := m2 \quad (10.29)$$

$$masa3 := m3 \quad (10.30)$$

$$masa4 := m4 \quad (10.31)$$

$$masa5 := m5 \quad (10.32)$$

$$In1 := \begin{bmatrix} Ixx1 & Ixy1 & Ixz1 \\ Iyx1 & Iyy1 & Iyz1 \\ Izx1 & Izy1 & Izz1 \end{bmatrix} \quad (10.33)$$

$$In2 := \begin{bmatrix} Ixx2 & Ixy2 & Ixz2 \\ Iyx2 & Iyy2 & Iyz2 \\ Izx2 & Izy2 & Izz2 \end{bmatrix} \quad (10.34)$$

$$In3 := \begin{bmatrix} Ixx3 & Ixy3 & Ixz3 \\ Iyx3 & Iyy3 & Iyz3 \\ Izx3 & Izy3 & Izz3 \end{bmatrix} \quad (10.35)$$

$$In4 := \begin{bmatrix} Ixx4 & Ixy4 & Ixz4 \\ Iyx4 & Iyy4 & Iyz4 \\ Izx4 & Izy4 & Izz4 \end{bmatrix} \quad (10.36)$$

$$In5 := \begin{bmatrix} Ixx5 & Ixy5 & Ixz5 \\ Iyx5 & Iyy5 & Iyz5 \\ Izx5 & Izy5 & Izz5 \end{bmatrix} \quad (10.37)$$

$$\begin{aligned} II := & \text{map}(combine, \text{rot}(0, 1).In1.\text{Transpose}(\text{rot}(0, 1))) \\ & \left[ \left[ \frac{1}{2} IxxI \cos(2qI) + \frac{1}{2} IxxI + \frac{1}{2} IzxI \sin(2qI) \right. \right. \\ & \quad + \frac{1}{2} IxzI \sin(2qI) + \frac{1}{2} IzzI - \frac{1}{2} IzzI \cos(2qI), \\ & \quad \frac{1}{2} IxxI \sin(2qI) + \frac{1}{2} IzxI - \frac{1}{2} IzxI \cos(2qI) \\ & \quad - \frac{1}{2} IxzI \cos(2qI) - \frac{1}{2} IxzI - \frac{1}{2} IzzI \sin(2qI), \\ & \quad \left. \cos(qI) IxyI + \sin(qI) IzyI \right], \\ & \left[ \frac{1}{2} IxxI \sin(2qI) - \frac{1}{2} IzxI \cos(2qI) - \frac{1}{2} IzxI + \frac{1}{2} IxzI \right. \\ & \quad - \frac{1}{2} IxzI \cos(2qI) - \frac{1}{2} IzzI \sin(2qI), \frac{1}{2} IxxI \\ & \quad - \frac{1}{2} IxxI \cos(2qI) - \frac{1}{2} IzxI \sin(2qI) - \frac{1}{2} IxzI \sin(2qI) \\ & \quad \left. + \frac{1}{2} IzzI \cos(2qI) + \frac{1}{2} IzzI, \sin(qI) IxyI - \cos(qI) IzyI \right], \\ & \left[ IyxI \cos(qI) + IyzI \sin(qI), IyxI \sin(qI) - IyzI \cos(qI), IyyI \right] \end{aligned} \quad (10.38)$$

$$\begin{aligned}
I2 &:= \text{rot}(0, 2).In2.\text{Transpose}(\text{rot}(0, 2)) \\
&= [[(\cos(q1) \cos(q2) Ixx2 + \sin(q1) Iyx2 + \cos(q1) \sin(q2) Izx2) \cos(q1) \cos(q2) + (\cos(q1) \cos(q2) Ixy2 \\
&\quad + \sin(q1) Iyy2 + \cos(q1) \sin(q2) Izy2) \sin(q1) + (\cos(q1) \cos(q2) Ixz2 + \sin(q1) Iyz2 \\
&\quad + \cos(q1) \sin(q2) Izz2) \cos(q1) \sin(q2), (\cos(q1) \cos(q2) Ixx2 + \sin(q1) Iyx2 \\
&\quad + \cos(q1) \sin(q2) Izx2) \sin(q1) \cos(q2) - (\cos(q1) \cos(q2) Ixy2 + \sin(q1) Iyy2 + \cos(q1) \sin(q2) Izy2) \cos(q1) \\
&\quad + (\cos(q1) \cos(q2) Ixz2 + \sin(q1) Iyz2 + \cos(q1) \sin(q2) Izz2) \sin(q1) \sin(q2), (\cos(q1) \cos(q2) Ixx2 \\
&\quad + \sin(q1) Iyx2 + \cos(q1) \sin(q2) Izx2) \sin(q2) - (\cos(q1) \cos(q2) Ixz2 + \sin(q1) Iyz2 \\
&\quad + \cos(q1) \sin(q2) Izz2) \cos(q2)], \\
&[(\sin(q1) \cos(q2) Ixx2 - \cos(q1) Iyx2 + \sin(q1) \sin(q2) Izx2) \cos(q1) \cos(q2) + (\sin(q1) \cos(q2) Ixy2 \\
&\quad - \cos(q1) Iyy2 + \sin(q1) \sin(q2) Izy2) \sin(q1) + (\sin(q1) \cos(q2) Ixz2 - \cos(q1) Iyz2 \\
&\quad + \sin(q1) \sin(q2) Izz2) \cos(q1) \sin(q2), (\sin(q1) \cos(q2) Ixx2 - \cos(q1) Iyx2 \\
&\quad + \sin(q1) \sin(q2) Izx2) \sin(q1) \cos(q2) - (\sin(q1) \cos(q2) Ixy2 - \cos(q1) Iyy2 + \sin(q1) \sin(q2) Izy2) \cos(q1) \\
&\quad + (\sin(q1) \cos(q2) Ixz2 - \cos(q1) Iyz2 + \sin(q1) \sin(q2) Izz2) \sin(q1) \sin(q2), (\sin(q1) \cos(q2) Ixx2 \\
&\quad - \cos(q1) Iyx2 + \sin(q1) \sin(q2) Izx2) \sin(q2) - (\sin(q1) \cos(q2) Ixz2 - \cos(q1) Iyz2 \\
&\quad + \sin(q1) \sin(q2) Izz2) \cos(q2)], \\
&[(\sin(q2) Ixx2 - \cos(q2) Izx2) \cos(q1) \cos(q2) + (\sin(q2) Ixy2 - \cos(q2) Izy2) \sin(q1) + (\sin(q2) Ixz2 \\
&\quad - \cos(q2) Izz2) \cos(q1) \sin(q2), (\sin(q2) Ixx2 - \cos(q2) Izx2) \sin(q1) \cos(q2) - (\sin(q2) Ixy2 \\
&\quad - \cos(q2) Izy2) \cos(q1) + (\sin(q2) Ixz2 - \cos(q2) Izz2) \sin(q1) \sin(q2), (\sin(q2) Ixx2 - \cos(q2) Izx2) \sin(q2) \\
&\quad - (\sin(q2) Ixz2 - \cos(q2) Izz2) \cos(q2)]]
\end{aligned}$$

(10.39)

$$\begin{aligned}
I4 &:= \text{rot}(0, 4).In4.\text{Transpose}(\text{rot}(0, 4)) \\
&= [[((\frac{1}{2} \cos(q1 - q2 - q4) + \frac{1}{2} \cos(q1 + q2 + q4)) Ixx4 + \sin(q1) Iyx4 + (\frac{1}{2} \sin(q1 + q2 + q4) - \frac{1}{2} \sin(q1 \\
&\quad - q2 - q4)) Izx4) ((\frac{1}{2} \cos(q1 - q2 - q4) + \frac{1}{2} \cos(q1 + q2 + q4)) + ((\frac{1}{2} \cos(q1 - q2 - q4) + \frac{1}{2} \cos(q1 \\
&\quad + q2 + q4)) Ixy4 + \sin(q1) Iyy4 + (\frac{1}{2} \sin(q1 + q2 + q4) - \frac{1}{2} \sin(q1 - q2 - q4)) Izy4) \sin(q1) \\
&\quad + ((\frac{1}{2} \cos(q1 - q2 - q4) + \frac{1}{2} \cos(q1 + q2 + q4)) Ixz4 + \sin(q1) Iyz4 + (\frac{1}{2} \sin(q1 + q2 + q4) \\
&\quad - \frac{1}{2} \sin(q1 - q2 - q4)) Izz4) ((\frac{1}{2} \sin(q1 + q2 + q4) - \frac{1}{2} \sin(q1 - q2 - q4)), ((\frac{1}{2} \cos(q1 - q2 - q4) \\
&\quad + \frac{1}{2} \cos(q1 + q2 + q4)) Ixx4 + \sin(q1) Iyx4 + (\frac{1}{2} \sin(q1 + q2 + q4) - \frac{1}{2} \sin(q1 - q2 - q4)) Izx4) \\
&\quad ((\frac{1}{2} \sin(q1 + q2 + q4) + \frac{1}{2} \sin(q1 - q2 - q4)) - ((\frac{1}{2} \cos(q1 - q2 - q4) + \frac{1}{2} \cos(q1 + q2 + q4)) Ixy4 \\
&\quad + \sin(q1) Iyy4 + (\frac{1}{2} \sin(q1 + q2 + q4) - \frac{1}{2} \sin(q1 - q2 - q4)) Izy4) \cos(q1) + ((\frac{1}{2} \cos(q1 - q2 - q4) \\
&\quad + \frac{1}{2} \cos(q1 + q2 + q4)) Ixz4 + \sin(q1) Iyz4 + (\frac{1}{2} \sin(q1 + q2 + q4) - \frac{1}{2} \sin(q1 - q2 - q4)) Izz4) \\
&\quad ((\frac{1}{2} \cos(q1 - q2 - q4) - \frac{1}{2} \cos(q1 + q2 + q4)). ((\frac{1}{2} \cos(q1 - q2 - q4) + \frac{1}{2} \cos(q1 + q2 + q4)) Ixx4 \\
&\quad + \sin(q1) Iyx4 + (\frac{1}{2} \sin(q1 + q2 + q4) - \frac{1}{2} \sin(q1 - q2 - q4)) Izx4) \sin(q2 + q4) - ((\frac{1}{2} \cos(q1 - q2 \\
&\quad - q4) + \frac{1}{2} \cos(q1 + q2 + q4)) Ixz4 + \sin(q1) Iyz4 + (\frac{1}{2} \sin(q1 + q2 + q4) - \frac{1}{2} \sin(q1 - q2 - q4)) Izz4) \\
&\quad \cos(q2 + q4)]]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[ \left( \left( \frac{1}{2} \sin(qI + q2 + q4) + \frac{1}{2} \sin(qI - q2 - q4) \right) Ixx4 - \cos(qI) Iyx4 + \left( \frac{1}{2} \cos(qI - q2 - q4) - \frac{1}{2} \cos(qI + q2 + q4) \right) Izx4 \right) \left( \frac{1}{2} \cos(qI - q2 - q4) + \frac{1}{2} \cos(qI + q2 + q4) \right) + \left( \left( \frac{1}{2} \sin(qI + q2 + q4) + \frac{1}{2} \sin(qI - q2 - q4) \right) Ixy4 - \cos(qI) Iyy4 + \left( \frac{1}{2} \cos(qI - q2 - q4) - \frac{1}{2} \cos(qI + q2 + q4) \right) Izy4 \right) \sin(qI) \right. \\
& + \left( \left( \frac{1}{2} \sin(qI + q2 + q4) + \frac{1}{2} \sin(qI - q2 - q4) \right) Ixz4 - \cos(qI) Iyz4 + \left( \frac{1}{2} \cos(qI - q2 - q4) - \frac{1}{2} \cos(qI + q2 + q4) \right) Izz4 \right) \left( \frac{1}{2} \sin(qI + q2 + q4) - \frac{1}{2} \sin(qI - q2 - q4) \right), \left( \left( \frac{1}{2} \sin(qI + q2 + q4) + \frac{1}{2} \sin(qI - q2 - q4) \right) Ixy4 + \left( \frac{1}{2} \cos(qI - q2 - q4) - \frac{1}{2} \cos(qI + q2 + q4) \right) Izx4 \right) \\
& + \left( \frac{1}{2} \sin(qI + q2 + q4) + \frac{1}{2} \sin(qI - q2 - q4) \right) Ixz4 - \cos(qI) Iyz4 + \left( \frac{1}{2} \cos(qI - q2 - q4) - \frac{1}{2} \cos(qI + q2 + q4) \right) Izz4 \left( \frac{1}{2} \sin(qI + q2 + q4) - \frac{1}{2} \sin(qI - q2 - q4) \right) - \left( \left( \frac{1}{2} \sin(qI + q2 + q4) + \frac{1}{2} \sin(qI - q2 - q4) \right) Ixy4 \right. \\
& - \cos(qI) Iyy4 + \left( \frac{1}{2} \cos(qI - q2 - q4) - \frac{1}{2} \cos(qI + q2 + q4) \right) Izy4 \left. \right) \cos(qI) + \left( \left( \frac{1}{2} \sin(qI + q2 + q4) + \frac{1}{2} \sin(qI - q2 - q4) \right) Ixz4 \right. \\
& + \left( \frac{1}{2} \sin(qI - q2 - q4) \right) Ixz4 - \cos(qI) Iyz4 + \left( \frac{1}{2} \cos(qI - q2 - q4) - \frac{1}{2} \cos(qI + q2 + q4) \right) Izz4 \left( \frac{1}{2} \cos(qI - q2 - q4) - \frac{1}{2} \cos(qI + q2 + q4) \right), \left( \left( \frac{1}{2} \sin(qI + q2 + q4) + \frac{1}{2} \sin(qI - q2 - q4) \right) Ixx4 \right. \\
& - \cos(qI) Iyx4 + \left( \frac{1}{2} \cos(qI - q2 - q4) - \frac{1}{2} \cos(qI + q2 + q4) \right) Izx4 \left. \right) \sin(q2 + q4) - \left( \left( \frac{1}{2} \sin(qI + q2 + q4) + \frac{1}{2} \sin(qI - q2 - q4) \right) Ixz4 \right. \\
& + \left( \frac{1}{2} \cos(qI - q2 - q4) - \frac{1}{2} \cos(qI + q2 + q4) \right) Ixz4 - \cos(qI) Iyz4 + \left( \frac{1}{2} \cos(qI - q2 - q4) - \frac{1}{2} \cos(qI + q2 + q4) \right) Izz4 \left. \right) \\
& \cos(q2 + q4) \Big], \\
& \left[ (\sin(q2 + q4) Ixx4 - \cos(q2 + q4) Izx4) \left( \frac{1}{2} \cos(qI - q2 - q4) + \frac{1}{2} \cos(qI + q2 + q4) \right) + (\sin(q2 + q4) Ixy4 - \cos(q2 + q4) Izy4) \sin(qI) + (\sin(q2 + q4) Ixz4 - \cos(q2 + q4) Izz4) \left( \frac{1}{2} \sin(qI + q2 + q4) - \frac{1}{2} \sin(qI - q2 - q4) \right), (\sin(q2 + q4) Ixx4 - \cos(q2 + q4) Izx4) \left( \frac{1}{2} \sin(qI + q2 + q4) + \frac{1}{2} \sin(qI - q2 - q4) \right) - (\sin(q2 + q4) Ixy4 - \cos(q2 + q4) Izy4) \cos(qI) + (\sin(q2 + q4) Ixz4 - \cos(q2 + q4) Izz4) \left( \frac{1}{2} \cos(qI - q2 - q4) - \frac{1}{2} \cos(qI + q2 + q4) \right), (\sin(q2 + q4) Ixx4 - \cos(q2 + q4) Izx4) \sin(q2 + q4) - (\sin(q2 + q4) Ixz4 - \cos(q2 + q4) Izz4) \cos(q2 + q4) \right] \Big]
\end{aligned}$$

(10.40)

$I5 := rot(0, 5).In5.Transpose(rot(0, 5))$

$$\begin{aligned}
 & \left[ \left[ \left( \left( \frac{1}{4} \cos(qI - q5 - q2 - q4) + \frac{1}{4} \cos(qI - q5 + q2 + q4) + \frac{1}{4} \cos(qI + q5 - q2 - q4) + \frac{1}{4} \cos(qI + q5 \right. \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \left. + q2 + q4) + \frac{1}{2} \cos(qI - q5) - \frac{1}{2} \cos(qI + q5) \right) Ixx5 + \left( -\frac{1}{4} \sin(qI + q5 + q2 + q4) - \frac{1}{4} \sin(qI + q5 \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - q2 - q4) + \frac{1}{4} \sin(qI - q5 + q2 + q4) + \frac{1}{4} \sin(qI - q5 - q2 - q4) + \frac{1}{2} \sin(qI + q5) + \frac{1}{2} \sin(qI - q5) \right) \right. \\
 & \quad \left. Iyx5 + \left( \frac{1}{2} \sin(qI + q2 + q4) - \frac{1}{2} \sin(qI - q2 - q4) \right) Izx5 \right) \left( \frac{1}{4} \cos(qI - q5 - q2 - q4) + \frac{1}{4} \cos(qI - q5 \right. \\
 & \quad \left. + q2 + q4) + \frac{1}{4} \cos(qI + q5 - q2 - q4) + \frac{1}{4} \cos(qI + q5 + q2 + q4) + \frac{1}{2} \cos(qI - q5) - \frac{1}{2} \cos(qI \right. \\
 & \quad \left. + q5) \right) + \left( \left( \frac{1}{4} \cos(qI - q5 - q2 - q4) + \frac{1}{4} \cos(qI - q5 + q2 + q4) + \frac{1}{4} \cos(qI + q5 - q2 - q4) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \frac{1}{4} \cos(qI + q5 + q2 + q4) + \frac{1}{2} \cos(qI - q5) - \frac{1}{2} \cos(qI + q5) \right) Ixy5 + \left( -\frac{1}{4} \sin(qI + q5 + q2 + q4) \right. \\
 & \quad \left. - \frac{1}{4} \sin(qI + q5 - q2 - q4) + \frac{1}{4} \sin(qI - q5 + q2 + q4) + \frac{1}{4} \sin(qI - q5 - q2 - q4) + \frac{1}{2} \sin(qI + q5 \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{2} \sin(qI - q5) \right) Iyy5 + \left( \frac{1}{2} \sin(qI + q2 + q4) - \frac{1}{2} \sin(qI - q2 - q4) \right) Izy5 \right) \left( -\frac{1}{4} \sin(qI + q5 + q2 \right. \\
 & \quad \left. + q4) - \frac{1}{4} \sin(qI + q5 - q2 - q4) + \frac{1}{4} \sin(qI - q5 + q2 + q4) + \frac{1}{4} \sin(qI - q5 - q2 - q4) + \frac{1}{2} \sin(qI \right. \\
 & \quad \left. + q5) + \frac{1}{2} \sin(qI - q5) \right) + \left( \left( \frac{1}{4} \cos(qI - q5 - q2 - q4) + \frac{1}{4} \cos(qI - q5 + q2 + q4) + \frac{1}{4} \cos(qI + q5 \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - q2 - q4) + \frac{1}{4} \cos(qI + q5 + q2 + q4) + \frac{1}{2} \cos(qI - q5) - \frac{1}{2} \cos(qI + q5) \right) Ixz5 + \left( -\frac{1}{4} \sin(qI + q5 \right. \\
 & \quad \left. + q2 + q4) - \frac{1}{4} \sin(qI + q5 - q2 - q4) + \frac{1}{4} \sin(qI - q5 + q2 + q4) + \frac{1}{4} \sin(qI - q5 - q2 - q4) \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{2} \sin(qI + q5) + \frac{1}{2} \sin(qI - q5) \right) Iyz5 + \left( \frac{1}{2} \sin(qI + q2 + q4) - \frac{1}{2} \sin(qI - q2 - q4) \right) Izz5 \right) \\
 & \quad \left( \frac{1}{2} \sin(qI + q2 + q4) - \frac{1}{2} \sin(qI - q2 - q4) \right), \left( \left( \frac{1}{4} \cos(qI - q5 - q2 - q4) + \frac{1}{4} \cos(qI - q5 + q2 + q4) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \frac{1}{4} \cos(qI + q5 - q2 - q4) + \frac{1}{4} \cos(qI + q5 + q2 + q4) + \frac{1}{2} \cos(qI - q5) - \frac{1}{2} \cos(qI + q5) \right) Ixx5 + \left( -\frac{1}{4} \sin(qI + q5 + q2 + q4) \right. \\
 & \quad \left. - \frac{1}{4} \sin(qI + q5 - q2 - q4) - \frac{1}{4} \sin(qI + q5 - q2 - q4) + \frac{1}{4} \sin(qI - q5 + q2 + q4) + \frac{1}{4} \sin(qI - q5 \right. \\
 & \quad \left. - q2 - q4) + \frac{1}{2} \sin(qI + q5) + \frac{1}{2} \sin(qI - q5) \right) Iyx5 + \left( \frac{1}{2} \sin(qI + q2 + q4) - \frac{1}{2} \sin(qI - q2 \right. \\
 & \quad \left. - q4) \right) Izx5 \left( \frac{1}{4} \sin(qI + q5 + q2 + q4) + \frac{1}{4} \sin(qI + q5 - q2 - q4) + \frac{1}{4} \sin(qI - q5 + q2 + q4) \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{4} \sin(qI - q5 - q2 - q4) - \frac{1}{2} \sin(qI + q5) + \frac{1}{2} \sin(qI - q5) \right) + \left( \left( \frac{1}{4} \cos(qI - q5 - q2 - q4) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \frac{1}{4} \cos(qI - q5 + q2 + q4) + \frac{1}{4} \cos(qI + q5 - q2 - q4) + \frac{1}{4} \cos(qI + q5 + q2 + q4) + \frac{1}{2} \cos(qI - q5) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \frac{1}{2} \cos(qI + q5) \right) Ixy5 + \left( -\frac{1}{4} \sin(qI + q5 + q2 + q4) - \frac{1}{4} \sin(qI + q5 - q2 - q4) + \frac{1}{4} \sin(qI - q5 \right. \\
 & \quad \left. + q2 + q4) + \frac{1}{4} \sin(qI - q5 - q2 - q4) + \frac{1}{2} \sin(qI + q5) + \frac{1}{2} \sin(qI - q5) \right) Iyy5 + \left( \frac{1}{2} \sin(qI + q2 \right. \\
 & \quad \left. + q4) - \frac{1}{2} \sin(qI - q2 - q4) \right) Izy5 \left( -\frac{1}{4} \cos(qI - q5 - q2 - q4) - \frac{1}{4} \cos(qI - q5 + q2 + q4) \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{4} \cos(qI + q5 - q2 - q4) + \frac{1}{4} \cos(qI + q5 + q2 + q4) - \frac{1}{2} \cos(qI - q5) - \frac{1}{2} \cos(qI + q5) \right) \\
 & \quad + \left( \left( \frac{1}{4} \cos(qI - q5 - q2 - q4) + \frac{1}{4} \cos(qI - q5 + q2 + q4) + \frac{1}{4} \cos(qI + q5 - q2 - q4) + \frac{1}{4} \cos(qI \right. \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + q5 + q2 + q4) + \frac{1}{2} \cos(qI - q5) - \frac{1}{2} \cos(qI + q5) \Big) Ixz5 + \left( -\frac{1}{4} \sin(qI + q5 + q2 + q4) - \frac{1}{4} \sin(qI \right. \\
& \left. + q5 - q2 - q4) + \frac{1}{4} \sin(qI - q5 + q2 + q4) + \frac{1}{4} \sin(qI - q5 - q2 - q4) + \frac{1}{2} \sin(qI + q5) + \frac{1}{2} \sin(qI \right. \\
& \left. - q5) \Big) Iyz5 + \left( \frac{1}{2} \sin(qI + q2 + q4) - \frac{1}{2} \sin(qI - q2 - q4) \Big) Izx5 \Big) \left( \frac{1}{2} \cos(qI - q2 - q4) - \frac{1}{2} \cos(qI \right. \\
& \left. + q2 + q4) \Big), \left( \left( \frac{1}{4} \cos(qI - q5 - q2 - q4) + \frac{1}{4} \cos(qI - q5 + q2 + q4) + \frac{1}{4} \cos(qI + q5 - q2 - q4) \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{4} \cos(qI + q5 + q2 + q4) + \frac{1}{2} \cos(qI - q5) - \frac{1}{2} \cos(qI + q5) \right) Ixx5 + \left( -\frac{1}{4} \sin(qI + q5 + q2 + q4) \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{1}{4} \sin(qI + q5 - q2 - q4) + \frac{1}{4} \sin(qI - q5 + q2 + q4) + \frac{1}{4} \sin(qI - q5 - q2 - q4) + \frac{1}{2} \sin(qI + q5) \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{2} \sin(qI - q5) \right) Iyx5 + \left( \frac{1}{2} \sin(qI + q2 + q4) - \frac{1}{2} \sin(qI - q2 - q4) \right) Izx5 \Big) \left( \frac{1}{2} \sin(q2 + q4 + q5) \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{2} \sin(q2 + q4 - q5) \right) + \left( \left( \frac{1}{4} \cos(qI - q5 - q2 - q4) + \frac{1}{4} \cos(qI - q5 + q2 + q4) + \frac{1}{4} \cos(qI + q5 \right. \right. \\
& \left. \left. - q2 - q4) + \frac{1}{4} \cos(qI + q5 + q2 + q4) + \frac{1}{2} \cos(qI - q5) - \frac{1}{2} \cos(qI + q5) \right) Ixy5 + \left( -\frac{1}{4} \sin(qI + q5 \right. \right. \\
& \left. \left. + q2 + q4) - \frac{1}{4} \sin(qI + q5 - q2 - q4) + \frac{1}{4} \sin(qI - q5 + q2 + q4) + \frac{1}{4} \sin(qI - q5 - q2 - q4) \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{2} \sin(qI + q5) + \frac{1}{2} \sin(qI - q5) \right) Iyy5 + \left( \frac{1}{2} \sin(qI + q2 + q4) - \frac{1}{2} \sin(qI - q2 - q4) \right) Izx5 \Big) \Big( \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{1}{2} \cos(q2 + q4 - q5) + \frac{1}{2} \cos(q2 + q4 + q5) \right) - \left( \left( \frac{1}{4} \cos(qI - q5 - q2 - q4) + \frac{1}{4} \cos(qI - q5 + q2 \right. \right. \\
& \left. \left. + q4) + \frac{1}{4} \cos(qI + q5 - q2 - q4) + \frac{1}{4} \cos(qI + q5 + q2 + q4) + \frac{1}{2} \cos(qI - q5) - \frac{1}{2} \cos(qI + q5) \right) \right. \right. \\
& \left. \left. Ixz5 + \left( -\frac{1}{4} \sin(qI + q5 + q2 + q4) - \frac{1}{4} \sin(qI + q5 - q2 - q4) + \frac{1}{4} \sin(qI - q5 + q2 + q4) + \frac{1}{4} \sin(qI \right. \right. \\
& \left. \left. - q5 - q2 - q4) + \frac{1}{2} \sin(qI + q5) + \frac{1}{2} \sin(qI - q5) \right) Iyz5 + \left( \frac{1}{2} \sin(qI + q2 + q4) - \frac{1}{2} \sin(qI - q2 \right. \right. \\
& \left. \left. - q4) \right) Izx5 \Big) \cos(q2 + q4) \Big], \\
& \left[ \left( \left( \frac{1}{4} \sin(qI + q5 + q2 + q4) + \frac{1}{4} \sin(qI + q5 - q2 - q4) + \frac{1}{4} \sin(qI - q5 + q2 + q4) + \frac{1}{4} \sin(qI - q5 \right. \right. \\
& \left. \left. - q2 - q4) - \frac{1}{2} \sin(qI + q5) + \frac{1}{2} \sin(qI - q5) \right) Ixx5 + \left( -\frac{1}{4} \cos(qI - q5 - q2 - q4) - \frac{1}{4} \cos(qI - q5 \right. \right. \\
& \left. \left. + q2 + q4) + \frac{1}{4} \cos(qI + q5 - q2 - q4) + \frac{1}{4} \cos(qI + q5 + q2 + q4) - \frac{1}{2} \cos(qI - q5) - \frac{1}{2} \cos(qI \right. \right. \\
& \left. \left. + q5) \right) Iyx5 + \left( \frac{1}{2} \cos(qI - q2 - q4) - \frac{1}{2} \cos(qI + q2 + q4) \right) Izx5 \Big) \left( \frac{1}{4} \cos(qI - q5 - q2 - q4) \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{4} \cos(qI - q5 + q2 + q4) + \frac{1}{4} \cos(qI + q5 - q2 - q4) + \frac{1}{4} \cos(qI + q5 + q2 + q4) + \frac{1}{2} \cos(qI - q5) \right) \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{1}{2} \cos(qI + q5) \right) + \left( \left( \frac{1}{4} \sin(qI + q5 + q2 + q4) + \frac{1}{4} \sin(qI + q5 - q2 - q4) + \frac{1}{4} \sin(qI - q5 + q2 \right. \right. \\
& \left. \left. + q4) + \frac{1}{4} \sin(qI - q5 - q2 - q4) - \frac{1}{2} \sin(qI + q5) + \frac{1}{2} \sin(qI - q5) \right) Ixy5 + \left( -\frac{1}{4} \cos(qI - q5 - q2 \right. \right. \\
& \left. \left. - q4) - \frac{1}{4} \cos(qI - q5 + q2 + q4) + \frac{1}{4} \cos(qI + q5 - q2 - q4) + \frac{1}{4} \cos(qI + q5 + q2 + q4) - \frac{1}{2} \cos(qI \right. \right. \\
& \left. \left. - q5) - \frac{1}{2} \cos(qI + q5) \right) Iyy5 + \left( \frac{1}{2} \cos(qI - q2 - q4) - \frac{1}{2} \cos(qI + q2 + q4) \right) Izx5 \Big) \left( -\frac{1}{4} \sin(qI + q5 \right. \right. \\
& \left. \left. + q2 + q4) - \frac{1}{4} \sin(qI + q5 - q2 - q4) + \frac{1}{4} \sin(qI - q5 + q2 + q4) + \frac{1}{4} \sin(qI - q5 - q2 - q4) \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \sin(qI + q5) + \frac{1}{2} \sin(qI - q5) \Big) + \left( \left( \frac{1}{4} \sin(qI + q5 + q2 + q4) + \frac{1}{4} \sin(qI + q5 - q2 - q4) \right. \right. \\
& + \frac{1}{4} \sin(qI - q5 + q2 + q4) + \frac{1}{4} \sin(qI - q5 - q2 - q4) - \frac{1}{2} \sin(qI + q5) + \frac{1}{2} \sin(qI - q5) \Big) Ixz5 + \Big( \\
& - \frac{1}{4} \cos(qI - q5 - q2 - q4) - \frac{1}{4} \cos(qI - q5 + q2 + q4) + \frac{1}{4} \cos(qI + q5 - q2 - q4) + \frac{1}{4} \cos(qI + q5 \\
& + q2 + q4) - \frac{1}{2} \cos(qI - q5) - \frac{1}{2} \cos(qI + q5) \Big) Iyz5 + \left( \frac{1}{2} \cos(qI - q2 - q4) - \frac{1}{2} \cos(qI + q2 \right. \\
& \left. + q4) \right) Izz5 \Big) \left( \frac{1}{2} \sin(qI + q2 + q4) - \frac{1}{2} \sin(qI - q2 - q4) \right), \left( \left( \frac{1}{4} \sin(qI + q5 + q2 + q4) + \frac{1}{4} \sin(qI + q5 \right. \right. \\
& - q2 - q4) + \frac{1}{4} \sin(qI - q5 + q2 + q4) + \frac{1}{4} \sin(qI - q5 - q2 - q4) - \frac{1}{2} \sin(qI + q5) + \frac{1}{2} \sin(qI - q5) \Big) \\
& Ixx5 + \left( -\frac{1}{4} \cos(qI - q5 - q2 - q4) - \frac{1}{4} \cos(qI - q5 + q2 + q4) + \frac{1}{4} \cos(qI + q5 - q2 - q4) \right. \\
& + \frac{1}{4} \cos(qI + q5 + q2 + q4) - \frac{1}{2} \cos(qI - q5) - \frac{1}{2} \cos(qI + q5) \Big) Iyx5 + \left( \frac{1}{2} \cos(qI - q2 - q4) \right. \\
& - \frac{1}{2} \cos(qI + q2 + q4) \Big) Izx5 \Big) \left( \frac{1}{4} \sin(qI + q5 + q2 + q4) + \frac{1}{4} \sin(qI + q5 - q2 - q4) + \frac{1}{4} \sin(qI - q5 \right. \\
& + q2 + q4) + \frac{1}{4} \sin(qI - q5 - q2 - q4) - \frac{1}{2} \sin(qI + q5) + \frac{1}{2} \sin(qI - q5) \Big) + \left( \left( \frac{1}{4} \sin(qI + q5 + q2 \right. \right. \\
& + q4) + \frac{1}{4} \sin(qI + q5 - q2 - q4) + \frac{1}{4} \sin(qI - q5 + q2 + q4) + \frac{1}{4} \sin(qI - q5 - q2 - q4) - \frac{1}{2} \sin(qI \\
& + q5) + \frac{1}{2} \sin(qI - q5) \Big) Ixy5 + \left( -\frac{1}{4} \cos(qI - q5 - q2 - q4) - \frac{1}{4} \cos(qI - q5 + q2 + q4) + \frac{1}{4} \cos(qI \right. \\
& + q5 - q2 - q4) + \frac{1}{4} \cos(qI + q5 + q2 + q4) - \frac{1}{2} \cos(qI - q5) - \frac{1}{2} \cos(qI + q5) \Big) Iyz5 + \left( \frac{1}{2} \cos(qI \right. \\
& - q2 - q4) - \frac{1}{2} \cos(qI + q2 + q4) \Big) Izy5 \Big) \left( -\frac{1}{4} \cos(qI - q5 - q2 - q4) - \frac{1}{4} \cos(qI - q5 + q2 + q4) \right. \\
& + \frac{1}{4} \cos(qI + q5 - q2 - q4) + \frac{1}{4} \cos(qI + q5 + q2 + q4) - \frac{1}{2} \cos(qI - q5) - \frac{1}{2} \cos(qI + q5) \Big) \\
& + \left( \left( \frac{1}{4} \sin(qI + q5 + q2 + q4) + \frac{1}{4} \sin(qI + q5 - q2 - q4) + \frac{1}{4} \sin(qI - q5 + q2 + q4) + \frac{1}{4} \sin(qI - q5 \right. \right. \\
& - q2 - q4) - \frac{1}{2} \sin(qI + q5) + \frac{1}{2} \sin(qI - q5) \Big) Ixz5 + \left( -\frac{1}{4} \cos(qI - q5 - q2 - q4) - \frac{1}{4} \cos(qI - q5 \right. \\
& + q2 + q4) + \frac{1}{4} \cos(qI + q5 - q2 - q4) + \frac{1}{4} \cos(qI + q5 + q2 + q4) - \frac{1}{2} \cos(qI - q5) - \frac{1}{2} \cos(qI \\
& + q5) \Big) Iyz5 + \left( \frac{1}{2} \cos(qI - q2 - q4) - \frac{1}{2} \cos(qI + q2 + q4) \right) Izz5 \Big) \left( \frac{1}{2} \cos(qI - q2 - q4) - \frac{1}{2} \cos(qI \right. \\
& + q2 + q4) \Big), \left( \left( \frac{1}{4} \sin(qI + q5 + q2 + q4) + \frac{1}{4} \sin(qI + q5 - q2 - q4) + \frac{1}{4} \sin(qI - q5 + q2 + q4) \right. \right. \\
& + \frac{1}{4} \sin(qI - q5 - q2 - q4) - \frac{1}{2} \sin(qI + q5) + \frac{1}{2} \sin(qI - q5) \Big) Ixx5 + \left( -\frac{1}{4} \cos(qI - q5 - q2 - q4) \right. \\
& - \frac{1}{4} \cos(qI - q5 + q2 + q4) + \frac{1}{4} \cos(qI + q5 - q2 - q4) + \frac{1}{4} \cos(qI + q5 + q2 + q4) - \frac{1}{2} \cos(qI - q5) \\
& - \frac{1}{2} \cos(qI + q5) \Big) Iyx5 + \left( \frac{1}{2} \cos(qI - q2 - q4) - \frac{1}{2} \cos(qI + q2 + q4) \right) Izx5 \Big) \left( \frac{1}{2} \sin(q2 + q4 + q5) \right. \\
& + \frac{1}{2} \sin(q2 + q4 - q5) \Big) + \left( \left( \frac{1}{4} \sin(qI + q5 + q2 + q4) + \frac{1}{4} \sin(qI + q5 - q2 - q4) + \frac{1}{4} \sin(qI - q5 \right. \right. \\
& + q2 + q4) + \frac{1}{4} \sin(qI - q5 - q2 - q4) - \frac{1}{2} \sin(qI + q5) + \frac{1}{2} \sin(qI - q5) \Big) Ixy5 + \left( -\frac{1}{4} \cos(qI - q5 \right. \\
& - q2 - q4) - \frac{1}{4} \cos(qI - q5 + q2 + q4) + \frac{1}{4} \cos(qI + q5 - q2 - q4) + \frac{1}{4} \cos(qI + q5 + q2 + q4)
\end{aligned}$$





$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{2} \cos(qI - q5) - \frac{1}{2} \cos(qI + q5) \Big) Iyy5 + \left( \frac{1}{2} \cos(qI - q2 - q4) - \frac{1}{2} \cos(qI + q2 + q4) \right) Iz5 \Big) \Big( \\
& - \frac{1}{2} \cos(q2 + q4 - q5) + \frac{1}{2} \cos(q2 + q4 + q5) \Big) - \left( \left( \frac{1}{4} \sin(qI + q5 + q2 + q4) + \frac{1}{4} \sin(qI + q5 - q2 - q4) \right. \right. \\
& - \frac{1}{4} \sin(qI - q5 + q2 + q4) + \frac{1}{4} \sin(qI - q5 - q2 - q4) - \frac{1}{2} \sin(qI + q5) + \frac{1}{2} \sin(qI - q5) \Big) Ixz5 \\
& + \left. \left( -\frac{1}{4} \cos(qI - q5 - q2 - q4) - \frac{1}{4} \cos(qI - q5 + q2 + q4) + \frac{1}{4} \cos(qI + q5 - q2 - q4) + \frac{1}{4} \cos(qI \right. \right. \\
& + q5 + q2 + q4) - \frac{1}{2} \cos(qI - q5) - \frac{1}{2} \cos(qI + q5) \Big) Iyz5 + \left( \frac{1}{2} \cos(qI - q2 - q4) - \frac{1}{2} \cos(qI + q2 \right. \\
& \left. \left. + q4) \right) Izz5 \right) \cos(q2 + q4), \\
& \left[ \left( \left( \frac{1}{2} \sin(q2 + q4 + q5) + \frac{1}{2} \sin(q2 + q4 - q5) \right) Ixx5 + \left( -\frac{1}{2} \cos(q2 + q4 - q5) + \frac{1}{2} \cos(q2 + q4 \right. \right. \\
& + q5) \Big) Iyx5 - \cos(q2 + q4) Izx5 \right) \left( \frac{1}{4} \cos(qI - q5 - q2 - q4) + \frac{1}{4} \cos(qI - q5 + q2 + q4) + \frac{1}{4} \cos(qI \right. \\
& + q5 - q2 - q4) + \frac{1}{4} \cos(qI + q5 + q2 + q4) + \frac{1}{2} \cos(qI - q5) - \frac{1}{2} \cos(qI + q5) \Big) + \left( \left( \frac{1}{2} \sin(q2 + q4 \right. \right. \\
& + q5) + \frac{1}{2} \sin(q2 + q4 - q5) \Big) Ixy5 + \left( -\frac{1}{2} \cos(q2 + q4 - q5) + \frac{1}{2} \cos(q2 + q4 + q5) \right) Iyy5 - \cos(q2 \right. \\
& + q4) Izx5 \Big) \left( -\frac{1}{4} \sin(qI + q5 + q2 + q4) - \frac{1}{4} \sin(qI + q5 - q2 - q4) + \frac{1}{4} \sin(qI - q5 + q2 + q4) \right. \\
& + \frac{1}{4} \sin(qI - q5 - q2 - q4) + \frac{1}{2} \sin(qI + q5) + \frac{1}{2} \sin(qI - q5) \Big) + \left( \left( \frac{1}{2} \sin(q2 + q4 + q5) + \frac{1}{2} \sin(q2 \right. \right. \\
& + q4 - q5) \Big) Ixz5 + \left( -\frac{1}{2} \cos(q2 + q4 - q5) + \frac{1}{2} \cos(q2 + q4 + q5) \right) Iyz5 - \cos(q2 + q4) Izz5 \Big) \left( \frac{1}{2} \sin(qI \right. \\
& + q2 + q4) - \frac{1}{2} \sin(qI - q2 - q4) \Big), \left( \left( \frac{1}{2} \sin(q2 + q4 + q5) + \frac{1}{2} \sin(q2 + q4 - q5) \right) Ixx5 + \left( -\frac{1}{2} \cos(q2 \right. \right. \\
& + q4 - q5) + \frac{1}{2} \cos(q2 + q4 + q5) \Big) Iyx5 - \cos(q2 + q4) Izx5 \Big) \left( \frac{1}{4} \sin(qI + q5 + q2 + q4) + \frac{1}{4} \sin(qI \right. \\
& + q5 - q2 - q4) + \frac{1}{4} \sin(qI - q5 + q2 + q4) + \frac{1}{4} \sin(qI - q5 - q2 - q4) - \frac{1}{2} \sin(qI + q5) + \frac{1}{2} \sin(qI \right. \\
& - q5) \Big) + \left( \left( \frac{1}{2} \sin(q2 + q4 + q5) + \frac{1}{2} \sin(q2 + q4 - q5) \right) Ixy5 + \left( -\frac{1}{2} \cos(q2 + q4 - q5) + \frac{1}{2} \cos(q2 \right. \right. \\
& + q4 + q5) \Big) Iyy5 - \cos(q2 + q4) Izx5 \Big) \left( -\frac{1}{4} \cos(qI - q5 - q2 - q4) - \frac{1}{4} \cos(qI - q5 + q2 + q4) \right. \\
& + \frac{1}{4} \cos(qI + q5 - q2 - q4) + \frac{1}{4} \cos(qI + q5 + q2 + q4) - \frac{1}{2} \cos(qI - q5) - \frac{1}{2} \cos(qI + q5) \Big) \\
& + \left( \left( \frac{1}{2} \sin(q2 + q4 + q5) + \frac{1}{2} \sin(q2 + q4 - q5) \right) Ixz5 + \left( -\frac{1}{2} \cos(q2 + q4 - q5) + \frac{1}{2} \cos(q2 + q4 \right. \right. \\
& + q5) \Big) Iyz5 - \cos(q2 + q4) Izz5 \Big) \left( \frac{1}{2} \cos(qI - q2 - q4) - \frac{1}{2} \cos(qI + q2 + q4) \right), \left( \left( \frac{1}{2} \sin(q2 + q4 + q5) \right. \right. \\
& + \frac{1}{2} \sin(q2 + q4 - q5) \Big) Ixx5 + \left( -\frac{1}{2} \cos(q2 + q4 - q5) + \frac{1}{2} \cos(q2 + q4 + q5) \right) Iyx5 - \cos(q2 \right. \\
& + q4) Izx5 \Big) \left( \frac{1}{2} \sin(q2 + q4 + q5) + \frac{1}{2} \sin(q2 + q4 - q5) \right) + \left( \left( \frac{1}{2} \sin(q2 + q4 + q5) + \frac{1}{2} \sin(q2 + q4 \right. \right. \\
& - q5) \Big) Ixy5 + \left( -\frac{1}{2} \cos(q2 + q4 - q5) + \frac{1}{2} \cos(q2 + q4 + q5) \right) Iyy5 - \cos(q2 + q4) Izx5 \Big) \left( -\frac{1}{2} \cos(q2 \right. \\
& + q4 - q5) + \frac{1}{2} \cos(q2 + q4 + q5) \Big) - \left( \left( \frac{1}{2} \sin(q2 + q4 + q5) + \frac{1}{2} \sin(q2 + q4 - q5) \right) Ixz5 + \left( \right. \right. \\
& - \frac{1}{2} \cos(q2 + q4 - q5) + \frac{1}{2} \cos(q2 + q4 + q5) \Big) Iyz5 - \cos(q2 + q4) Izz5 \Big) \cos(q2 + q4) \Big] \Big]
\end{aligned}$$

(10.41)

## Programas en matlab

### FRICCIÓN BISCOSA

```
function b=B  
  
global b1 b2 b3 b4 b5  
  
% como salida entrega una matriz de 2x2  
  
b = [b1 0 0 0 0;  
      0 b2 0 0 0;  
      0 0 b3 0 0;  
      0 0 0 b4 0;  
      0 0 0 0 b5];
```

### VECTOR DE CORIOLIS

```
function C=C(q,dq)  
  
%se mandan llamar los valores de las distancias de los centros de masa y  
%de los valores iniciales para las operaciones de las matrices.  
  
%se mandan llamar los valores de las masas de los eslabones  
global m1 m2 m3 m4 m5  
  
global d1 a2 a4 d5 gc  
  
%variables de los tensores de inercia para la dinamica  
  
global Ixx_1 Ixy_1 Ixz_1 Iyx_1 Iyy_1 Iyz_1 Izx_1 Izy_1 Izz_1  
global Ixx_2 Ixy_2 Ixz_2 Iyx_2 Iyy_2 Iyz_2 Izx_2 Izy_2 Izz_2  
global Ixx_3 Ixy_3 Ixz_3 Iyx_3 Iyy_3 Iyz_3 Izx_3 Izy_3 Izz_3  
global Ixx_4 Ixy_4 Ixz_4 Iyx_4 Iyy_4 Iyz_4 Izx_4 Izy_4 Izz_4  
global Ixx_5 Ixy_5 Ixz_5 Iyx_5 Iyy_5 Iyz_5 Izx_5 Izy_5 Izz_5  
  
%variables de los centros de masa  
  
global lc1x lc1y lc1z lc2x lc2y lc2z  
global lc3x lc3y lc3z lc4x lc4y lc4z  
global lc5x lc5y lc5z  
  
%parametrización de variables...
```

```

q1=q(1);
q2=q(2);
q3=q(3);
q4=q(4);
q5=q(5);

dq1=dq(1);
dq2=dq(2);
dq3=dq(3);
dq4=dq(4);
dq5=dq(5);

%componentes del vector de coriolis

V1=(-m5*q3*cos(2*q2)-m3*lc3y-m3*q3*cos(2*q2)-m4*q3*cos(2*q2)-m4*lc4z
*cos(2*q2+q4)+m4*lc4x*sin(2*q2+q4)-(1/2)*m5*lc5x*sin(q4-q5)-(1/2)*m5
*lc5y*cos(q4+q5)+(1/2)*m5*lc5y*cos(q4-q5)+m4*lc4z*cos(q4)-m4*lc4x*sin
(q4)-(1/2)*m5*lc5x*sin(q4+q5)+(1/2)*m5*lc5x*sin(2*q2+q5+q4)+m5*lc5z*cos
(q4)+m5*d5*cos(q4)+m3*q3+m4*q3-m5*d5*cos(2*q2+q4)+m5*q3+(1/2)*m5*lc5x
*sin(2*q2-q5+q4)+(1/2)*m5*lc5y*cos(2*q2+q5+q4)-m5*lc5z*cos(2*q2+q4)+m3*
lc3y*cos(2*q2)-(1/2)*m5*lc5y*cos(2*q2-q5+q4)+m3*lc3x*sin(2*q2))*dq1*dq3
+(\cos(q2+q4)*Ixy_4-(1/2)*m5*d5*lc5y*sin(q2+q4+q5)-(1/2)*m5*d5*lc5x*cos
(q2+q4-q5)-(1/2)*m5*d5*lc5y*sin(q2+q4-q5)-(1/2)*m5*lc5y*lc5x*cos(-2*q5+
q2+q4)-(1/4)*Iyy_5*sin(2*q5+q2+q4)-(1/2)*m5*lc5y*lc5x*cos(2*q5+q2+q4)-
(1/2)*m5*d5*lc5x*cos(q2+q4+q5)-(1/2)*m5*lc5z*lc5y*sin(q2+q4-q5)+(1/2)*
Ixy_5*cos(q2+q4)+(1/2)*m5*lc5z*lc5x*cos(q2+q4+q5)-(1/2)*m5*lc5z*lc5x*cos
(q2+q4-q5)-(1/2)*m5*lc5z*lc5y*sin(q2+q4+q5)+(1/2)*Izx_5*cos(q2+q4-q5)-
(1/2)*Izy_5*sin(q2+q4-q5)+(1/4)*Ixy_5*cos(2*q5+q2+q4)+(1/4)*Ixx_5*sin
(2*q5+q2+q4)-(1/4)*Ixx_5*sin(-2*q5+q2+q4)+(1/4)*Iyy_5*sin(-2*q5+q2+q4)-
(1/4)*Ixy_5*cos(-2*q5+q2+q4)+(1/4)*Iyx_5*cos(-2*q5+q2+q4)+(1/2)*Izy_5*
sin(q2+q4+q5)-(1/2)*Izx_5*cos(q2+q4+q5)+(1/4)*m5*lc5y^2*sin(2*q5+q2+q4)-
(1/4)*m5*lc5x^2*sin(2*q5+q2+q4)+(1/4)*m5*lc5x^2*sin(-2*q5+q2+q4)-(1/2)*
Iyx_5*cos(q2+q4)-m4*lc4y*cos(q2+q4)*lc4x+(1/4)*Iyx_5*cos(2*q5+q2+q4)-
sin(q2+q4)*Izy_4-m4*lc4y*sin(q2+q4)*lc4z-(1/4)*m5*lc5y^2*sin(-2*q5+q2+q4)
)*dq4^2+(-(1/4)*m5*q3*lc5x*cos(q2+q4+q5)+(1/4)*m5*lc5y*lc5x*cos(2*q5-q2)-
(1/2)*m5*q3*d5*sin(q2+q4)-(1/8)*m5*lc5y^2*sin(-2*q5+2*q4+q2)-(1/2)*m5*
lc5x*d5*cos(2*q4-q5+q2)+(1/8)*m5*sin(2*q5-q2)*lc5x^2+m3*lc3z*cos(q2)-
(1/4)*m5*q3*lc5y*sin(q2+q4-q5)-(1/4)*m5*q3*lc5x*cos(q4-q2+q5)-(1/2)*m5*
lc5y*lc5z*sin(2*q4-q5+q2)+(1/4)*m5*lc5y*lc5x*cos(2*q5+2*q4+q2)+(1/2)*m5*
lc5y*d5*sin(2*q4+q5+q2)+(1/8)*m5*lc5y^2*sin(q2+2*q5)-(1/2)*m5*q3*d5*sin(
q2+q4)+(1/4)*m5*q3*lc5y*sin(q4-q2+q5)-(1/2)*m5*q3*lc5z*sin(-q2+q4)+(1/4)
*m5*lc5x^2*sin(2*q4+q2)+(1/2)*m4*lc4x^2*sin(2*q4+q2)+m4*lc4y^2*sin(q2)+(1/
2)*m4*lc4x^2*sin(q2)+(1/8)*m5*lc5x^2*sin(-2*q5+2*q4+q2)-(1/2)*m5*lc5x*
lc5z*cos(2*q4-q5+q2)-(1/2)*m5*lc5x*lc5z*cos(2*q4+q5+q2)-(1/4)*m5*q3*lc5x*
cos(q4-q2-q5)-(1/4)*m5*lc5y*lc5x*cos(q2+2*q5)+(1/2)*m5*lc5y*lc5z*sin(2*
q4+q5+q2)-(1/4)*m5*lc5y*lc5x*cos(-2*q5+2*q4+q2)+m5*lc5z*d5*sin(q2)-(1/2)
*m5*lc5y*d5*sin(2*q4-q5+q2)-(1/8)*m5*lc5y^2*sin(2*q5-q2)-(1/2)*m4*q3*lc4x*
*cos(-q2+q4)-(1/2)*m4*q3*lc4z*sin(-q2+q4)-(1/2)*m4*q3*lc4z*sin(q2+q4)-
(1/2)*m5*lc5x*d5*cos(2*q4+q5+q2)-(1/8)*m5*lc5y^2*sin(2*q5+2*q4+q2)+(1/
8)*m5*lc5x^2*sin(2*q5+2*q4+q2)-(1/2)*m4*lc4z^2*sin(2*q4+q2)-(1/8)*m5*
lc5x^2*sin(q2+2*q5)-(1/2)*m5*lc5z^2*sin(2*q4+q2)-(1/2)*m4*q3*lc4x*cos(q2
+q4)-(1/2)*m5*q3*lc5z*sin(q2+q4)-(1/4)*m5*q3*lc5x*cos(q2+q4-q5)+(1/2)*m5*
d5^2*sin(q2)+(1/2)*m4*lc4z^2*sin(q2)-m4*lc4x*lc4z*cos(2*q4+q2)+(1/4)*m5*

```

$$\begin{aligned}
& \text{lc5y}^2 * \sin(2 * q4 + q2) - (1/4) * m5 * q3 * \text{lc5y} * \sin(q4 - q2 - q5) + (1/4) * m5 * q3 * \text{lc5y} * \sin(q2 + q4 + q5) + (1/2) * m5 * \text{lc5z}^2 * \sin(q2) + (3/4) * m5 * \text{lc5y}^2 * \sin(q2) - (1/2) * m5 * d5^2 * \sin(2 * q4 + q2) + (3/4) * m5 * \text{lc5x}^2 * \sin(q2) - m5 * \text{lc5z} * d5 * \sin(2 * q4 + q2) * dq3 * dq2 + (2/2) * (\cos(q2 + q4) * I_{xy\_4} - (1/2) * m5 * d5 * \text{lc5y} * \sin(q2 + q4 + q5) - (1/2) * m5 * d5 * \text{lc5x} * \cos(q2 + q4 - q5) - (1/2) * m5 * d5 * \text{lc5y} * \sin(q2 + q4 - q5) - (1/2) * m5 * \text{lc5y} * \text{lc5x} * \cos(-2 * q5 + q2 + q4) - (1/4) * I_{yy\_5} * \sin(2 * q5 + q2 + q4) - (1/2) * m5 * \text{lc5y} * \text{lc5x} * \cos(2 * q5 + q2 + q4) + (1/2) * m5 * d5 * \text{lc5x} * \cos(q2 + q4 + q5) - (1/2) * m5 * \text{lc5z} * \text{lc5y} * \sin(q2 + q4 - q5) + (1/2) * I_{zx\_5} * \cos(q2 + q4 - q5) - (1/2) * m5 * \text{lc5z} * \text{lc5x} * \cos(q2 + q4 + q5) + (1/2) * I_{zy\_5} * \sin(q2 + q4 - q5) + (1/4) * I_{xy\_5} * \cos(2 * q5 + q2 + q4) + (1/4) * I_{xx\_5} * \sin(2 * q5 + q2 + q4) - (1/4) * I_{xx\_5} * \sin(-2 * q5 + q2 + q4) + (1/4) * I_{yy\_5} * \sin(-2 * q5 + q2 + q4) + (1/4) * I_{xy\_5} * \cos(-2 * q5 + q2 + q4) + (1/4) * I_{yx\_5} * \cos(-2 * q5 + q2 + q4) + (1/2) * I_{zy\_5} * \sin(q2 + q4 + q5) - (1/2) * I_{zx\_5} * \cos(q2 + q4 + q5) + (1/4) * m5 * \text{lc5y}^2 * 2 * \sin(2 * q5 + q2 + q4) - (1/4) * m5 * \text{lc5x}^2 * \sin(2 * q5 + q2 + q4) + (1/4) * m5 * \text{lc5x}^2 * \sin(-2 * q5 + q2 + q4) - (1/2) * I_{yx\_5} * \cos(q2 + q4) - m4 * \text{lc4y} * \cos(q2 + q4) * \text{lc4x} + (1/4) * I_{yx\_5} * \cos(2 * q5 + q2 + q4) + \sin(q2 + q4) * I_{zy\_4} - m4 * \text{lc4y} * \sin(q2 + q4) * \text{lc4z} - (1/4) * m5 * \text{lc5y}^2 * 2 * \sin(-2 * q5 + q2 + q4)) * dq2 * dq4 + (-1/2) * m5 * d5 * \text{lc5y} * \sin(q2 + q4 + q5) + (1/2) * m5 * d5 * \text{lc5x} * \cos(q2 + q4 - q5) + (1/2) * m5 * d5 * \text{lc5y} * \sin(q2 + q4 - q5) + m5 * \text{lc5y} * \text{lc5x} * \cos(-2 * q5 + q2 + q4) - (1/2) * I_{yy\_5} * \sin(2 * q5 + q2 + q4) + (1/2) * m5 * \text{lc5z} * \text{lc5y} * \sin(q2 + q4 + q5) + (1/2) * m5 * \text{lc5z} * \text{lc5x} * \cos(q2 + q4 + q5) + (1/2) * m5 * \text{lc5z} * \text{lc5x} * \cos(q2 + q4 - q5) - (1/2) * m5 * \text{lc5z} * \text{lc5y} * \sin(q2 + q4 + q5) - (1/2) * I_{zx\_5} * \cos(q2 + q4 - q5) - (1/2) * I_{zy\_5} * \sin(q2 + q4 - q5) + (1/2) * I_{xy\_5} * \cos(2 * q5 + q2 + q4) + (1/2) * I_{xx\_5} * \sin(2 * q5 + q2 + q4) - (1/2) * I_{yy\_5} * \sin(-2 * q5 + q2 + q4) - (1/2) * I_{xy\_5} * \cos(-2 * q5 + q2 + q4) + (1/2) * I_{zy\_5} * \sin(q2 + q4 + q5) - (1/2) * I_{zx\_5} * \cos(q2 + q4 + q5) + (1/2) * m5 * \text{lc5y}^2 * 2 * \sin(2 * q5 + q2 + q4) - (1/2) * m5 * \text{lc5x}^2 * \sin(-2 * q5 + q2 + q4) + (1/2) * I_{yx\_5} * \cos(2 * q5 + q2 + q4) + (1/2) * m5 * \text{lc5y}^2 * 2 * \sin(-2 * q5 + q2 + q4) * dq4 * dq5 + (m4 * \text{lc4y} * \cos(q2) + m3 * \text{lc3z} * \cos(q2) + (1/2) * m5 * \text{lc5x} * \sin(-q2 + q5) + (1/2) * m5 * \text{lc5x} * \sin(q2 + q5) + (1/2) * m5 * \text{lc5y} * \cos(-q2 + q5) + (1/2) * m5 * \text{lc5y} * \cos(q2 + q5)) * dq2 * dq3 + (-1/4) * m5 * q3 * \text{lc5x} * \cos(q2 + q4 + q5) - (1/2) * m5 * \text{lc5y} * \text{lc5x} * \cos(2 * q5 - q2) + (1/4) * m5 * \text{lc5y}^2 * 2 * \sin(-2 * q5 + 2 * q4 + q2) + (1/2) * m5 * \text{lc5x} * d5 * \cos(2 * q4 - q5 + q2) - (1/4) * m5 * \sin(2 * q5 - q2) * \text{lc5x}^2 + (1/4) * m5 * q3 * \text{lc5y} * \sin(q2 + q4 - q5) + (1/4) * m5 * q3 * \text{lc5x} * \cos(q4 - q2 + q5) + (1/2) * m5 * \text{lc5y} * \text{lc5z} * \sin(2 * q4 - q5 + q2) + (1/2) * m5 * \text{lc5y} * \text{lc5x} * \cos(2 * q5 + 2 * q4 + q2) + (1/2) * m5 * \text{lc5y} * d5 * \sin(2 * q4 + q5 + q2) + (1/4) * m5 * \text{lc5y}^2 * 2 * \sin(q2 + 2 * q5) - (1/4) * m5 * q3 * \text{lc5y} * \sin(q4 - q2 + q5) - (1/4) * m5 * \text{lc5x} * 2 * \sin(-2 * q5 + 2 * q4 + q2) + (1/2) * m5 * \text{lc5x} * \text{lc5z} * \cos(2 * q4 - q5 + q2) - (1/2) * m5 * \text{lc5x} * \cos(q4 - q2 - q5) - (1/2) * m5 * \text{lc5y} * \text{lc5x} * \cos(q2 + 2 * q5) + (1/2) * m5 * \text{lc5y} * \text{lc5z} * \sin(2 * q4 + q5 + q2) + (1/2) * m5 * \text{lc5y} * \text{lc5x} * \cos(-2 * q5 + 2 * q4 + q2) + (1/2) * m5 * \text{lc5y} * d5 * \sin(2 * q4 - q5 + q2) + (1/4) * m5 * \text{lc5y}^2 * 2 * \sin(2 * q5 - q2) - (1/2) * m5 * \text{lc5x} * d5 * \cos(2 * q4 + q5 + q2) - (1/4) * m5 * \text{lc5y} * 2 * \sin(2 * q5 + 2 * q4 + q2) + (1/4) * m5 * \text{lc5x} * 2 * \sin(2 * q5 + 2 * q4 + q2) - (1/4) * m5 * \text{lc5x} * \sin(q4 - q2 - q5) + (1/4) * m5 * q3 * \text{lc5y} * \sin(q2 + q4 + q5)) * dq3 * dq5 + (-I_{xz\_2} * \cos(2 * q2) + I_{xy\_3} * \cos(2 * q2) - I_{yy\_3} * \sin(2 * q2) + I_{yx\_3} * \cos(2 * q2) + I_{xx\_3} * \sin(2 * q2) + m5 * \text{lc5x} * d5 * \cos(2 * q2 + 2 * q4 + q5) + (1/2) * m5 * \text{lc5x} * \text{lc5y} * \cos(-2 * q5 + 2 * q2 + 2 * q4) - (1/2) * I_{xz\_5} * \cos(2 * q2 + 2 * q4 + q5) + (1/2) * I_{zy\_5} * \sin(2 * q2 + 2 * q4 + q5) - (1/2) * I_{xz\_5} * \cos(2 * q2 + 2 * q4 - q5) + (1/2) * I_{xx\_5} * \sin(2 * q2 + 2 * q4) - I_{zz\_5} * \sin(2 * q2 + 2 * q4) + (1/4) * I_{xx\_5} * \sin(2 * q5 + 2 * q2 + 2 * q4) - (1/2) * I_{yz\_5} * \sin(2 * q2 + 2 * q4 - q5) + (1/2) * I_{yy\_5} * \sin(2 * q2 + 2 * q4) + (1/4) * I_{xy\_5} * \cos(2 * q5 + 2 * q2 + 2 * q4) - (1/2) * I_{zx\_5} * \cos(2 * q2 + 2 * q4 - q5) - (1/4) * I_{yx\_5} * \cos(-2 * q5 + 2 * q2 + 2 * q4) + m5 * \text{lc5x} * \text{lc5z} * \cos(2 * q2 + 2 * q4 - q5) - (1/4) * m5 * \text{lc5x} * \text{lc5x} * \sin(-2 * q5 + 2 * q2 + 2 * q4) + m2 * \text{lc2z}^2 * \sin(2 * q2) - (1/2) * m5 * \text{lc5x} * 2 * \sin(2 * q2 + 2 * q4) + m4 * \text{lc4z} * 2 * \sin(2 * q2 + 2 * q4) - m2 * \text{lc2x} * 2 * \sin(2 * q2) - (1/4) * m5 * \text{lc5x} * 2 * \sin(2 * q5 + 2 * q2 + 2 * q4) + m5 * d5 * 2 * \sin(2 * q2 + 2 * q4) - (1/2) * m5 * \text{lc5y} * \text{lc5x} * \sin(2 * q2 + 2 * q4 + q5) + 2 * m4 * \text{lc4x} * \text{lc4z} * \cos(2 * q2 + 2 * q4) + (1/4) * m5 * \text{lc5y} * 2 * \sin(2 * q5 + 2 * q2 + 2 * q4) + m4 * q3 * 2 * \sin(2 * q2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -m4 * l1c4x^2 * \sin(2 * q2 + 2 * q4) - m3 * l1c3x^2 * \sin(2 * q2) + m5 * l1c5x * l1c5z * \cos(2 * q2 + 2 * q4 \\
& + q5) + 2 * m5 * l1c5z * d5 * \sin(2 * q2 + 2 * q4) + m5 * l1c5x * q3 * \cos(2 * q2 + q5 + q4) + 2 * m4 * q3 * l1c4x * \\
& \cos(2 * q2 + q4) + 2 * m4 * q3 * l1c4z * \sin(2 * q2 + q4) - Izz_4 * \sin(2 * q2 + 2 * q4) - (1/2) * Izy_5 * \\
& \sin(2 * q2 + 2 * q4 - q5) - (1/4) * Ixy_5 * \cos(-2 * q5 + 2 * q2 + 2 * q4) - (1/4) * Iyy_5 * \sin(-2 * q5 + \\
& 2 * q2 + 2 * q4) + (1/4) * Ixx_5 * \sin(-2 * q5 + 2 * q2 + 2 * q4) + (1/2) * Iyz_5 * \sin(2 * q2 + 2 * q4 + q5) \\
& + 2 * m5 * d5 * q3 * \sin(2 * q2 + q4) + m5 * l1c5x * q3 * \cos(2 * q2 - q5 + q4) + 2 * m5 * l1c5z * q3 * \sin(2 * q2 \\
& + q4) - Izx_2 * \cos(2 * q2) + (1/4) * m5 * l1c5y^2 * \sin(-2 * q5 + 2 * q2 + 2 * q4) + Ixx_2 * \sin(2 * q2) \\
& - m5 * l1c5y * q3 * \sin(2 * q2 + q5 + q4) + m5 * l1c5y * q3 * \sin(2 * q2 - q5 + q4) - 2 * m3 * l1c3y * q3 * \sin \\
& (2 * q2) + 2 * m3 * l1c3x * q3 * \cos(2 * q2) + Ixx_4 * \sin(2 * q2 + 2 * q4) - 2 * m3 * l1c3x * l1c3y * \cos(2 * \\
& q2) + 2 * m2 * l1c2x * l1c2z * \cos(2 * q2) - Izx_4 * \cos(2 * q2 + 2 * q4) + m3 * l1c3y^2 * \sin(2 * q2) + m5 * \\
& l1c5z^2 * \sin(2 * q2 + 2 * q4) - Izx_4 * \cos(2 * q2 + 2 * q4) + m3 * q3^2 * \sin(2 * q2) + m5 * q3^2 * \sin \\
& (2 * q2) + m5 * l1c5y * d5 * \sin(2 * q2 + 2 * q4 - q5) + m5 * l1c5y * l1c5z * \sin(2 * q2 + 2 * q4 - q5) + m5 * \\
& l1c5x * d5 * \cos(2 * q2 + 2 * q4 - q5) * dq1 * dq2 + (m5 * l1c5x^2 * \sin(q2 + q4) + m5 * l1c5y^2 * \sin(q2 \\
& + q4) - (1/2) * m5 * d5 * l1c5y * \sin(q2 + q4 - q5) + (1/2) * m5 * d5 * l1c5y * \sin(q2 + q4 + q5) - (1/2) \\
& * m5 * d5 * l1c5x * \cos(q2 + q4 - q5) - (1/2) * m5 * d5 * l1c5x * \cos(q2 + q4 + q5) - (1/2) * m5 * l1c5z * \\
& l1c5y * \sin(q2 + q4 - q5) - (1/2) * m5 * l1c5z * l1c5x * \cos(q2 + q4 + q5) - (1/2) * m5 * l1c5z * l1c5x * \\
& \cos(q2 + q4 - q5) + (1/2) * m5 * l1c5z * l1c5y * \sin(q2 + q4 + q5) - (1/2) * m5 * q3 * l1c5x * \cos(q2 + \\
& q5) - (1/2) * m5 * q3 * l1c5x * \cos(-q2 + q5) + (1/2) * m5 * q3 * l1c5y * \sin(q2 + q5) + (1/2) * m5 * q3 \\
& * l1c5y * \sin(-q2 + q5) + (1/2) * Ixz_5 * \cos(q2 + q4 + q5) + (1/2) * Ixz_5 * \cos(q2 + q4 - q5) + (1 \\
& /2) * Iyz_5 * \sin(q2 + q4 - q5) - (1/2) * Iyz_5 * \sin(q2 + q4 + q5) + \sin(q2 + q4) * Izz_5 * dq5 * \\
& dq2 + ((1/2) * m4 * l1c4x * \sin(-q2 + q4) - (1/2) * m4 * l1c4z * \cos(-q2 + q4) + (1/2) * m4 * l1c4z * \\
& \cos(q2 + q4) - (1/2) * m4 * l1c4x * \sin(q2 + q4) + (1/2) * m5 * l1c5z * \cos(q2 + q4) - (1/4) * m5 * \\
& l1c5x * \sin(q2 + q4 - q5) - (1/4) * m5 * l1c5y * \cos(q4 - q2 - q5) - (1/4) * m5 * l1c5y * \cos(q2 + q4 + \\
& q5) - (1/4) * m5 * l1c5x * \sin(q2 + q4 + q5) + (1/2) * m5 * d5 * \cos(q2 + q4) + (1/4) * m5 * l1c5y * \cos \\
& (q2 + q4 - q5) + (1/4) * m5 * l1c5x * \sin(q4 - q2 + q5) - (1/2) * m5 * d5 * \cos(-q2 + q4) + (1/4) * m5 * \\
& l1c5y * \cos(q4 - q2 + q5) - (1/2) * m5 * l1c5z * \cos(-q2 + q4) + (1/4) * m5 * l1c5x * \sin(q4 - q2 - q5) \\
& * dq3^2 + (-1/4) * m5 * q3 * l1c5x * \cos(q2 + q4 + q5) - (1/2) * m5 * q3 * d5 * \sin(q2 + q4) - (1/4) * \\
& m5 * l1c5y^2 * \sin(-2 * q5 + 2 * q4 + q2) - m5 * l1c5x * d5 * \cos(2 * q4 - q5 + q2) - (1/4) * m5 * q3 * l1c5y * \\
& \sin(q2 + q4 - q5) + (1/4) * m5 * q3 * l1c5x * \cos(q4 - q2 + q5) - m5 * l1c5y * l1c5z * \sin(2 * q4 - q5 + q2) \\
& + (1/2) * m5 * l1c5y * l1c5x * \cos(2 * q5 + 2 * q4 + q2) + m5 * l1c5y * d5 * \sin(2 * q4 + q5 + q2) + (1/2) * m5 * \\
& * q3 * d5 * \sin(-q2 + q4) - (1/4) * m5 * q3 * l1c5y * \sin(q4 - q2 + q5) + (1/2) * m5 * q3 * l1c5z * \sin(- \\
& q2 + q4) + (1/2) * m5 * l1c5x^2 * \sin(2 * q4 + q2) + m4 * l1c4x^2 * \sin(2 * q4 + q2) + (1/4) * m5 * l1c5x^ \\
& 2 * \sin(-2 * q5 + 2 * q4 + q2) - m5 * l1c5x * l1c5z * \cos(2 * q4 - q5 + q2) - m5 * l1c5x * l1c5z * \cos(2 * q4 + \\
& q5 + q2) + (1/4) * m5 * q3 * l1c5x * \cos(q4 - q2 - q5) + m5 * l1c5y * l1c5z * \sin(2 * q4 + q5 + q2) - (1/2) * \\
& m5 * l1c5y * l1c5x * \cos(-2 * q5 + 2 * q4 + q2) - m5 * l1c5y * d5 * \sin(2 * q4 - q5 + q2) + (1/2) * m4 * q3 * \\
& l1c4x * \cos(-q2 + q4) + (1/2) * m4 * q3 * l1c4z * \sin(-q2 + q4) - (1/2) * m4 * q3 * l1c4z * \sin(q2 + q4) \\
& - m5 * l1c5x * d5 * \cos(2 * q4 + q5 + q2) - (1/4) * m5 * l1c5y^2 * \sin(2 * q5 + 2 * q4 + q2) + (1/4) * m5 * \\
& l1c5x^2 * \sin(2 * q5 + 2 * q4 + q2) - m4 * l1c4z^2 * \sin(2 * q4 + q2) - m5 * l1c5z^2 * \sin(2 * q4 + q2) - \\
& (1/2) * m4 * q3 * l1c4x * \cos(q2 + q4) - (1/2) * m5 * q3 * l1c5z * \sin(q2 + q4) - (1/4) * m5 * q3 * l1c5x * \\
& \cos(q2 + q4 - q5) - 2 * m4 * l1c4x * l1c4z * \cos(2 * q4 + q2) + (1/2) * m5 * l1c5y^2 * \sin(2 * q4 + q2) + \\
& (1/4) * m5 * q3 * l1c5y * \sin(q4 - q2 - q5) + (1/4) * m5 * q3 * l1c5y * \sin(q2 + q4 + q5) - m5 * d5^2 * \\
& \sin(2 * q4 + q2) - 2 * m5 * l1c5z * d5 * \sin(2 * q4 + q2) * dq3 * dq4 + (\sin(q2) * Izy_2 + \cos(q2 + q4) * \\
& * Ixy_4 - (1/2) * m5 * d5 * l1c5y * \sin(q2 + q4 + q5) - (1/2) * m5 * d5 * l1c5x * \cos(q2 + q4 - q5) - (1 \\
& /2) * m5 * d5 * l1c5y * \sin(q2 + q4 - q5) - (1/2) * m5 * l1c5y * l1c5x * \cos(-2 * q5 + q2 + q4) - (1/4) * \\
& Iyy_5 * \sin(2 * q5 + q2 + q4) - (1/2) * m5 * l1c5y * l1c5x * \cos(2 * q5 + q2 + q4) + (1/2) * m5 * d5 * l1c5x * \\
& * \cos(q2 + q4 + q5) - (1/2) * m5 * l1c5z * l1c5y * \sin(q2 + q4 - q5) + (1/2) * Ixy_5 * \cos(q2 + q4) + (1 \\
& /2) * m5 * l1c5z * l1c5x * \cos(q2 + q4 + q5) - (1/2) * m5 * l1c5z * l1c5x * \cos(q2 + q4 - q5) - \sin(q2) * \\
& Iyz_3 - (1/2) * m5 * l1c5z * l1c5y * \sin(q2 + q4 + q5) + (1/2) * Izx_5 * \cos(q2 + q4 - q5) + (1/2) * \\
& Izy_5 * \sin(q2 + q4 - q5) + (1/4) * Ixy_5 * \cos(2 * q5 + q2 + q4) + (1/4) * Ixx_5 * \sin(2 * q5 + q2 + \\
& q4) - (1/4) * Ixx_5 * \sin(-2 * q5 + q2 + q4) + (1/4) * Iyy_5 * \sin(-2 * q5 + q2 + q4) + (1/4) * \\
& Ixy_5 * \cos(-2 * q5 + q2 + q4) + (1/4) * Iyx_5 * \cos(-2 * q5 + q2 + q4) + (1/2) * Izy_5 * \sin(q2 + \\
& q4 + q5) - (1/2) * Izx_5 * \cos(q2 + q4 + q5) - m2 * l1c2y * \sin(q2) * l1c2z - m3 * l1c3z * \sin(q2) * q3 * \\
& \cos(q2) * Ixy_2 - (1/2) * m5 * q3 * l1c5x * \cos(-q2 + q5) - (1/2) * m5 * q3 * l1c5y * \sin(q2 + q5) - \\
& m2 * \cos(q2) * l1c2x * l1c2y + (1/2) * m5 * q3 * l1c5x * \cos(q2 + q5) + (1/2) * m5 * q3 * l1c5y * \sin(- \\
& q2 + q5) + \cos(q2) * Ixz_3 - m3 * l1c3z * \cos(q2) * l1c3x + (1/4) * m5 * l1c5y^2 * \sin(2 * q5 + q2 + q4) \\
& - m4 * l1c4y * \sin(q2) * q3 - (1/4) * m5 * l1c5x^2 * \sin(2 * q5 + q2 + q4) + (1/4) * m5 * l1c5x^2 * \sin(-
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2*q5+q2+q4)+m3*lc3z*sin(q2)*lc3y-(1/2)*Iyx_5*cos(q2+q4)-m4*lc4y*cos(q2+ \\
& q4)*lc4x+(1/4)*Iyx_5*cos(2*q5+q2+q4)+sin(q2+q4)*Izy_4-m4*lc4y*sin(q2+q4)* \\
& lc4z-(1/4)*m5*lc5y^2*sin(-2*q5+q2+q4))*dq2^2+(m5*lc5x*lc5y*cos(2*q5)+(1 \\
& /2)*m5*lc5x^2*sin(2*q5)+(1/2)*m5*lc5x*d5*cos(2*q2+2*q4+q5)-(1/2)*m5*lc5x* \\
& lc5y*cos(-2*q5+2*q2+2*q4)-(1/4)*Ixz_5*cos(2*q2+2*q4+q5)+(1/4)*Izy_5*sin \\
& (2*q2+2*q4+q5)+(1/4)*Ixz_5*cos(2*q2+2*q4-q5)+(1/4)*Ixx_5*sin(2*q5+2*q2+ \\
& 2*q4)-(1/4)*Iyy_5*sin(2*q5+2*q2+2*q4)+(1/4)*Iyz_5*sin(2*q2+2*q4-q5)+(1/ \\
& 4)*Ixy_5*cos(2*q5+2*q2+2*q4)+(1/4)*Iyx_5*cos(2*q5+2*q2+2*q4)+(1/4)*Izx_5* \\
& cos(2*q2+2*q4-q5)-(1/4)*Izx_5*cos(2*q2+2*q4+q5)+(1/4)*Iyx_5*cos(-2*q5+ \\
& 2*q2+2*q4)-(1/2)*m5*lc5x*lc5z*cos(2*q2+2*q4-q5)+(1/4)*m5*lc5x^2*sin(-2*q5+ \\
& 2*q2+2*q4)-(1/2)*m5*lc5y^2*sin(2*q5)-(1/4)*m5*lc5x^2*sin(2*q5+2*q2+2*q4) \\
& -(1/2)*m5*lc5y*d5*sin(2*q2+2*q4+q5)-(1/2)*m5*lc5x*lc5y*cos(2*q5+2*q2+2* \\
& q4)+(1/2)*Iyy_5*sin(2*q5)+(1/2)*m5*q3*lc5y*sin(q4-q5)+(1/2)*m5*q3*lc5y* \\
& sin(q4+q5)+(1/2)*m5*q3*lc5x*cos(q4-q5)-(1/2)*m5*q3*lc5x*cos(q4+q5)-(1/2) \\
& *m5*lc5y*lc5z*sin(2*q2+2*q4+q5)+(1/4)*m5*lc5y^2*sin(2*q5+2*q2+2*q4)+(1/2) \\
& *m5*lc5x*lc5z*cos(2*q2+2*q4+q5)+(1/2)*m5*lc5x*q3*cos(2*q2+q5+q4)-(1/2)* \\
& Iyx_5*cos(2*q5)+(1/4)*Izy_5*sin(2*q2+2*q4-q5)+(1/4)*Ixy_5*cos(2*q5+2*q2+ \\
& 2*q4)+(1/4)*Iyy_5*sin(-2*q5+2*q2+2*q4)-(1/4)*Ixx_5*sin(-2*q5+2*q2+2*q4) \\
& +(1/4)*Iyz_5*sin(2*q2+2*q4+q5)-(1/2)*m5*lc5x*q3*cos(2*q2-q5+q4)-(1/4)*m5 \\
& *lc5y^2*sin(-2*q5+2*q2+2*q4)-(1/2)*m5*lc5y*q3*sin(2*q2+q5+q4)-(1/2)*m5* \\
& lc5y*q3*sin(2*q2-q5+q4)-(1/2)*m5*lc5y*d5*sin(2*q2+2*q4-q5)-(1/2)*m5*lc5y* \\
& lc5z*sin(2*q2+2*q4-q5)-(1/2)*m5*lc5x*d5*cos(2*q2+2*q4-q5)-(1/2)*Ixy_5*cos \\
& (2*q5)-(1/2)*Ixx_5*sin(2*q5))*dq1*dq5+(-(1/2)*m5*d5*lc5y*sin(q2+q4+q5)+ \\
& (1/2)*m5*d5*lc5x*cos(q2+q4-q5)+(1/2)*m5*d5*lc5y*sin(q2+q4-q5)+m5*lc5y* \\
& lc5x*cos(-2*q5+q2+q4)-(1/2)*Iyy_5*sin(2*q5+q2+q4)-m5*lc5y*lc5x*cos(2*q5+ \\
& q2+q4)+(1/2)*m5*d5*lc5x*cos(q2+q4+q5)+(1/2)*m5*lc5z*lc5y*sin(q2+q4-q5)+ \\
& (1/2)*m5*lc5z*lc5x*cos(q2+q4+q5)+(1/2)*m5*lc5z*lc5x*cos(q2+q4-q5)-(1/2)* \\
& m5*lc5z*lc5y*sin(q2+q4+q5)-(1/2)*Izx_5*cos(q2+q4-q5)-(1/2)*Izy_5*sin(q2+ \\
& q4-q5)+(1/2)*Ixy_5*cos(2*q5+q2+q4)+(1/2)*Ixx_5*sin(2*q5+q2+q4)+(1/2)* \\
& Ixx_5*sin(-2*q5+q2+q4)-(1/2)*Iyy_5*sin(-2*q5+q2+q4)-(1/2)*Ixy_5*cos(-2*q5+ \\
& q2+q4)-(1/2)*Iyx_5*cos(-2*q5+q2+q4)+(1/2)*Izy_5*sin(q2+q4+q5)-(1/2)* \\
& Izx_5*cos(q2+q4+q5)+(1/2)*m5*q3*lc5x*cos(-q2+q5)-(1/2)*m5*q3*lc5y*sin \\
& (q2+q5)+(1/2)*m5*q3*lc5x*cos(q2+q5)-(1/2)*m5*q3*lc5y*sin(-q2+q5)+(1/2)* \\
& m5*lc5y^2*sin(2*q5+q2+q4)-(1/2)*m5*lc5x^2*sin(2*q5+q2+q4)-(1/2)*m5*lc5x^2 \\
& *sin(-2*q5+q2+q4)+(1/2)*Iyx_5*cos(2*q5+q2+q4)+(1/2)*m5*lc5y^2*sin(-2*q5+ \\
& q2+q4))*dq2*dq5+(m5*lc5x*d5*cos(2*q2+2*q4+q5)+(1/2)*m5*lc5x*lc5y*cos(-2* \\
& q5+2*q2+2*q4)-(1/2)*Ixz_5*cos(2*q2+2*q4+q5)+(1/2)*Izy_5*sin(2*q2+2*q4+q5) \\
& -(1/2)*Ixz_5*cos(2*q2+2*q4-q5)+(1/2)*Ixx_5*sin(2*q2+2*q4)-Izz_5*sin(2*q2+ \\
& 2*q4)+(1/4)*Ixx_5*sin(2*q5+2*q2+2*q4)-(1/4)*Iyy_5*sin(2*q5+2*q2+2*q4) \\
& -(1/2)*Iyz_5*sin(2*q2+2*q4-q5)+(1/2)*Iyy_5*sin(2*q2+2*q4)+(1/4)*Ixy_5*cos \\
& (2*q5+2*q2+2*q4)+(1/4)*Iyx_5*cos(2*q5+2*q2+2*q4)-(1/2)*Izx_5*cos(2*q2+2* \\
& q4-q5)-(1/2)*Izx_5*cos(2*q2+2*q4+q5)-(1/4)*Iyx_5*cos(-2*q5+2*q2+2*q4)+m5* \\
& lc5x*lc5z*cos(2*q2+2*q4-q5)-(1/4)*m5*lc5x^2*sin(-2*q5+2*q2+2*q4)-(1/2)*m5* \\
& lc5x^2*sin(2*q2+2*q4)+m4*lc4z^2*sin(2*q2+2*q4)-(1/4)*m5*lc5x^2*sin(2*q5+ \\
& 2*q2+2*q4)+m5*d5^2*sin(2*q2+2*q4)-(1/2)*m5*lc5y^2*sin(2*q2+2*q4)-m5*lc5y* \\
& d5*sin(2*q2+2*q4+q5)-(1/2)*m5*lc5x*lc5y*cos(2*q5+2*q2+2*q4)-(1/2)*m5*q3* \\
& lc5y*sin(q4-q5)+(1/2)*m5*q3*lc5y*sin(q4+q5)-(1/2)*m5*q3*lc5x*cos(q4-q5) \\
& -(1/2)*m5*q3*lc5x*cos(q4+q5)-m4*q3*lc4x*cos(q4)-m5*lc5y*lc5z*sin(2*q2+2*q4) \\
& +q5)+2*m4*lc4x*lc4z*cos(2*q2+2*q4)+(1/4)*m5*lc5y^2*sin(2*q5+2*q2+2*q4) \\
& -m4*lc4x^2*sin(2*q2+2*q4)+m5*lc5x*lc5z*cos(2*q2+2*q4+q5)+2*m5*lc5z*d5*sin( \\
& 2*q2+2*q4)+(1/2)*m5*lc5x*q3*cos(2*q2+q5+q4)+m4*q3*lc4x*cos(2*q2+q4)+m4*q3* \\
& lc4z*sin(2*q2+q4)-m4*q3*lc4z*sin(q4)-m5*q3*d5*sin(q4)-m5*q3*lc5z*sin(q4) \\
& -Izz_4*sin(2*q2+2*q4)-(1/2)*Izy_5*sin(2*q2+2*q4-q5)-(1/4)*Ixy_5*cos(-2*q5+ \\
& 2*q2+2*q4)-(1/4)*Iyy_5*sin(-2*q5+2*q2+2*q4)+(1/4)*Ixx_5*sin(-2*q5+2*q2+ \\
& 2*q4)+(1/2)*Iyz_5*sin(2*q2+2*q4+q5)+m5*d5*q3*sin(2*q2+q4)+(1/2)*m5*lc5x* \\
& q3*cos(2*q2-q5+q4)+m5*lc5z*q3*sin(2*q2+q4)+(1/4)*m5*lc5y^2*sin(-2*q5+2*q2+ \\
& 2*q4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2*q4) - (1/2)*m5*lc5y*q3*sin(2*q2+q5+q4) + (1/2)*m5*lc5y*q3*sin(2*q2-q5+q4) + \\
& I_{xx\_4}*sin(2*q2+2*q4) - I_{zx\_4}*cos(2*q2+2*q4) + m5*lc5z^2*sin(2*q2+2*q4) - I_{xz\_4}* \\
& cos(2*q2+2*q4) + m5*lc5y*d5*sin(2*q2+2*q4-q5) + m5*lc5y*lc5z*sin(2*q2+2*q4- \\
& q5) + m5*lc5x*d5*cos(2*q2+2*q4-q5) *dq1*dq4 + (-1/2)*m5*lc5x*sin(q2+q5) + (1/ \\
& 2)*m5*lc5x*sin(-q2+q5) - (1/2)*m5*lc5y*cos(q2+q5) + (1/2)*m5*lc5y*cos(-q2+q5) \\
& ) *dq5*dq3 + ((1/2)*m5*d5*lc5y*sin(q2+q4-q5) + (1/2)*m5*d5*lc5y*sin(q2+q4+q5) \\
& + (1/2)*m5*d5*lc5x*cos(q2+q4-q5) - (1/2)*m5*d5*lc5x*cos(q2+q4+q5) + (1/2)*m5* \\
& lc5z*lc5y*sin(q2+q4-q5) - (1/2)*m5*lc5z*lc5x*cos(q2+q4+q5) + (1/2)*m5*lc5z* \\
& lc5x*cos(q2+q4-q5) + (1/2)*m5*lc5z*lc5y*sin(q2+q4+q5) - (1/2)*m5*q3*lc5x*cos( \\
& q2+q5) + (1/2)*m5*q3*lc5x*cos(-q2+q5) + (1/2)*m5*q3*lc5y*sin(q2+q5) - (1/2)* \\
& m5*q3*lc5y*sin(-q2+q5) + (1/2)*I_{xz\_5}*cos(q2+q4+q5) - (1/2)*I_{xz\_5}*cos(q2+q4- \\
& q5) - (1/2)*I_{yz\_5}*sin(q2+q4-q5) - (1/2)*I_{yz\_5}*sin(q2+q4+q5) *dq5^2 + (m5* \\
& lc5x^2*sin(q2+q4) + m5*lc5y^2*sin(q2+q4) - (1/2)*m5*d5*lc5y*sin(q2+q4-q5) + \\
& (1/2)*m5*d5*lc5y*sin(q2+q4+q5) - (1/2)*m5*d5*lc5x*cos(q2+q4-q5) - (1/2)*m5* \\
& d5*lc5x*cos(q2+q4+q5) - (1/2)*m5*lc5z*lc5y*sin(q2+q4-q5) - (1/2)*m5*lc5z* \\
& lc5x*cos(q2+q4+q5) - (1/2)*m5*lc5z*lc5x*cos(q2+q4-q5) + (1/2)*m5*lc5z*lc5y* \\
& sin(q2+q4+q5) + (1/2)*I_{xz\_5}*cos(q2+q4+q5) + (1/2)*I_{xz\_5}*cos(q2+q4-q5) + (1/2)* \\
& I_{yz\_5}*sin(q2+q4-q5) - (1/2)*I_{yz\_5}*sin(q2+q4+q5) + sin(q2+q4)*I_{zz\_5}) *dq5*dq4;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V2 = & -(1/2)*dq1^2*m4*q3^2*sin(2*q2) (1/2)*dq1^2*m2*lc2z^2*sin(2*q2) + dq2*dq3* \\
& *m5*lc5y*cos(q4-q5) - dq2*dq3*m5*lc5y*cos(q4+q5) - dq2*dq3*m5*lc5x*sin(q4- \\
& q5) - dq2*dq3*m5*lc5x*sin(q4+q5) - 2*dq2*dq3*m4*lc4x*sin(q4) + 2*dq2*dq3*m4* \\
& lc4z*cos(q4) + 2*dq2*dq3*m5*d5*cos(q4) + 2*dq2*dq3*m5*lc5z*cos(q4) + (1/2)*dq3* \\
& dq5*m5*lc5x^2*sin(2*q5+q4) - (1/2)*dq3*dq5*m5*lc5y^2*sin(-2*q5+q4) + (1/2)* \\
& dq3*dq5*m5*lc5x^2*sin(-2*q5+q4) + (1/2)*dq3*dq5*m5*d5*lc5y*sin(q4+q5) + (1/2)* \\
& *dq1^2*I_{xz\_2}*cos(2*q2) + (1/2)*dq1^2*I_{zz\_2}*sin(2*q2) + (1/2)*dq1^2*I_{yy\_3}*sin( \\
& 2*q2) - (1/2)*dq1^2*I_{xy\_3}*cos(2*q2) - (1/2)*dq1^2*I_{yx\_3}*cos(2*q2) - (1/2)* \\
& dq1^2*I_{xx\_3}*sin(2*q2) + (1/4)*dq1^2*I_{xz\_5}*cos(2*q2+2*q4+q5) - (1/4)*dq1^2* \\
& I_{zy\_5}*sin(2*q2+2*q4+q5) + (1/4)*dq1^2*I_{xz\_5}*cos(2*q2+2*q4-q5) - (1/4)*dq1^2* \\
& I_{xx\_5}*sin(2*q2+2*q4) + (1/2)*dq1^2*I_{zz\_5}*sin(2*q2+2*q4) - (1/8)*dq1^2*I_{xx\_5} \\
& *sin(2*q5+2*q2+2*q4) + (1/8)*dq1^2*I_{yy\_5}*sin(2*q5+2*q2+2*q4) + (1/4)*dq1^2*I_{y} \\
& z\_5*sin(2*q2+2*q4-q5) - (1/4)*dq1^2*I_{yy\_5}*sin(2*q2+2*q4) - (1/8)*dq1^2*I_{xy\_5} \\
& *cos(2*q5+2*q2+2*q4) + dq1*dq3*m5*lc5z*d5*sin(2*q4+q2) + (1/4)*dq1*dq3*m5*q3* \\
& lc5x*cos(q2+q4+q5) - (1/4)*dq1*dq3*m5*lc5y*lc5x*cos(2*q5-q2) + (1/2)*dq1*dq3* \\
& m5*q3*d5*sin(-q2+q4) - (1/4)*dq1*dq3*m5*q3*lc5y*sin(q4-q2+q5) + (1/2)*dq1*dq3* \\
& m5*q3*lc5z*sin(-q2+q4) + (1/2)*dq1*dq3*m5*lc5x*lc5z*cos(2*q4-q5+q2) + (1/2)* \\
& dq1*dq3*m5*lc5x*lc5z*cos(2*q4+q5+q2) + (1/4)*dq1*dq3*m5*q3*lc5x*cos(q4-q2- \\
& q5) + (1/4)*dq1*dq3*m5*lc5y*lc5x*cos(q2+2*q5) - (1/2)*dq1*dq3*m5*lc5y*lc5z* \\
& sin(2*q4+q5+q2) + (1/4)*dq1*dq3*m5*lc5y*lc5x*cos(-2*q5+2*q4+q2) - dq1*dq3*m5* \\
& lc5z*d5*sin(q2) + (1/2)*dq1*dq3*m5*lc5y*d5*sin(2*q4-q5+q2) + (1/2)*dq1*dq3* \\
& m4*q3*lc4x*cos(-q2+q4) + (1/2)*dq1*dq3*m4*q3*lc4z*sin(-q2+q4) + (1/2)*dq1*dq3* \\
& *m4*q3*lc4z*sin(q2+q4) - dq2*dq4*m5*q3*lc5x*cos(q4+q5) - 2*dq2*dq4*m4*q3*lc4x* \\
& cos(q4) - 2*dq2*dq4*m4*q3*lc4z*sin(q4) - 2*dq2*dq4*m5*q3*d5*sin(q4) - 2*dq2* \\
& dq4*m5*q3*lc5z*sin(q4) - dq5*dq1*sin(q2+q4)*I_{zz\_5} - (1/8)*dq1^2*I_{yx\_5}*cos(2* \\
& q5+2*q2+2*q4) + (1/4)*dq1^2*I_{xz\_5}*cos(2*q2+2*q4+q5) + (1/8)*dq1^2*I_{yx\_5}*cos( \\
& -2*q5+2*q2+2*q4) + (1/4)*dq1^2*I_{zy\_5}*sin(2*q2+2*q4-q5) + (1/8)*dq1^2*I_{xy\_5}*cos( \\
& -2*q5+2*q2+2*q4) + (1/8)*dq1^2*I_{yy\_5}*sin(-2*q5+2*q2+2*q4) - (1/8)*dq1^2* \\
& I_{xx\_5}*sin(-2*q5+2*q2+2*q4) - (1/4)*dq1^2*I_{yz\_5}*sin(2*q2+2*q4+q5) + (1/2)* \\
& dq1^2*I_{zx\_2}*cos(2*q2) - (1/2)*dq1^2*I_{xx\_2}*sin(2*q2) + (1/4)*dq1^2*I_{xz\_5}*cos( \\
& 2*q2+2*q4-q5) - dq5^2*I_{yz\_5}*sin(q5) + (1/2)*dq1^2*I_{xz\_4}*cos(2*q2+2*q4) + (1/ \\
& 2)*dq1^2*I_{zz\_4}*sin(2*q2+2*q4) + dq5*dq4*m5*lc5y^2*sin(2*q5) - 2*dq5*dq4*m5* \\
& lc5x*lc5y*cos(2*q5) - dq5*dq4*m5*lc5x^2*sin(2*q5) + dq5^2*m5*lc5z*lc5y*sin( \\
& q5) - dq5^2*m5*lc5z*lc5x*cos(q5) - dq5^2*m5*d5*lc5x*cos(q5) + dq5^2*m5*d5* \\
& lc5y*sin(q5) - (1/2)*dq5^2*m5*q3*lc5y*sin(q4-q5) - (1/4)*dq1^2*m5*lc5x*lc5y*
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cos(-2*q5+2*q2+2*q4) - (1/2)*dq1^2*m5*lc5x*lc5z*cos(2*q2+2*q4-q5) + (1/2)* \\
& dq1^2*m5*lc5y*d5*sin(2*q2+2*q4+q5) + (1/4)*dq1^2*m5*lc5x*lc5y*cos(2*q5+2*q2+2*q4) + (1/2)* \\
& dq1^2*m5*lc5y*lc5z*sin(2*q2+2*q4+q5) - dq1^2*m4*lc4x*lc4z*cos(2*q2+2*q4) - (1/2)* \\
& dq1^2*m5*lc5x*lc5z*cos(2*q2+2*q4+q5) - dq1^2*m5*lc5z*d5*sin(2*q2+2*q4) - (1/2)* \\
& dq1^2*m5*lc5x*q3*cos(2*q2+q5+q4) - dq1^2*m4*q3*lc4x*cos(2*q2+q4) - dq1^2*m4*q3*lc4z* \\
& sin(2*q2+2*q4) - (1/2)*dq1^2*m5*lc5x*lc4z*sin(2*q2+q4) - dq1^2*m5*d5*q3*sin(2*q2+q4) - \\
& (1/2)*dq1^2*m5*lc5x*q3*cos(2*q2-q5+q4) - dq1^2*m5*lc5z*q3*sin(2*q2+q4) + (1/2)* \\
& dq2*dq1*sin(q2)*Iyz_3 + (1/2)*dq1^2*m5*lc5y*q3*sin(2*q2+q5+q4) - (1/2)* \\
& dq1^2*m5*lc5y*q3*sin(2*q2-q5+q4) - dq1^2*m3*lc3x*q3*cos(2*q2) - dq1^2*m2*lc2x* \\
& lc2z*cos(2*q2) - (1/2)*dq1^2*m5*lc5y*d5*sin(2*q2+2*q4-q5) - (1/2)*dq1^2*m5* \\
& lc5y*lc5z*sin(2*q2+2*q4-q5) - (1/2)*dq1^2*m5*lc5x*d5*cos(2*q2+2*q4-q5) - (1/2)* \\
& dq5*dq1*Iyy_5*sin(2*q5+q2+q4) + (3/4)*dq5*dq1*Iyz_5*sin(q2+q4+q5) - (3/4)* \\
& dq5*dq1*Ixz_5*cos(q2+q4+q5) + (1/2)*dq5*dq1*Ixy_5*cos(2*q5+q2+q4) + (1/2)*dq5* \\
& dq1*Ixx_5*sin(2*q5+q2+q4) + (1/2)*dq5*dq1*Ixx_5*sin(-2*q5+q2+q4) - (1/2)* \\
& dq5*dq1*Iyy_5*sin(-2*q5+q2+q4) - (1/2)*dq5*dq1*Ixy_5*cos(-2*q5+q2+q4) - (1/2)* \\
& *dq5*dq1*Iyx_5*cos(-2*q5+q2+q4) - (3/4)*dq5*dq1*Ixz_5*cos(q2+q4-q5) - (3/4)* \\
& dq5*dq1*Iyz_5*sin(q2+q4-q5) + (1/2)*dq5*dq1*Iyx_5*cos(2*q5+q2+q4) - (1/8)* \\
& dq1^2*m5*lc5y^2*sin(2*q5+2*q2+2*q4) + (1/2)*dq1^2*m4*lc4x^2*sin(2*q2+2*q4) + \\
& (1/8)*dq1^2*m5*lc5x^2*sin(-2*q5+2*q2+2*q4) + (1/2)*dq1^2*m3*lc3x^2*sin(2* \\
& q2) - (1/8)*dq1^2*m5*lc5y^2*sin(-2*q5+2*q2+2*q4) - (1/2)*dq1^2*m3*lc3y^2*sin(2* \\
& q2) - (1/2)*dq1^2*m5*lc5z^2*sin(2*q2+2*q4) - 2*dq2*dq3*m3*lc3y+dq4*dq3*m5* \\
& d5*cos(q4) + dq4*dq3*m5*lc5z*cos(q4) - (1/4)*dq1*dq4*Izx_5*cos(q2+q4-q5) - (1/ \\
& 4)*dq1*dq4*Izy_5*sin(q2+q4-q5) - (1/4)*dq1*dq4*Izy_5*sin(q2+q4+q5) + (1/4)* \\
& dq1*dq4*Ixz_5*cos(q2+q4+q5) - dq2*dq5*Iyy_5*sin(2*q5) + dq2*dq5*Iyx_5*cos(2* \\
& q5) + dq2*dq5*Ixy_5*cos(2*q5) + dq2*dq5*Ixx_5*sin(2*q5) - dq5*dq4*Iyy_5*sin(2* \\
& q5) + (1/2)*dq1^2*Izx_4*cos(2*q2+2*q4) - (1/2)*dq1^2*m5*lc5x*d5*cos(2*q2+2*q4+ \\
& q5) + (1/2)*dq4*dq3*m5*lc5y*cos(q4-q5) - (1/2)*dq4*dq3*m5*lc5y*cos(q4+q5) - (1/ \\
& 2)*dq4*dq3*m5*lc5x*sin(q4-q5) - (1/2)*dq4*dq3*m5*lc5x*sin(q4+q5) - dq4*dq3* \\
& m4*lc4x*sin(q4) + dq4*dq3*m4*lc4z*cos(q4) + (1/2)*dq1*dq3*m5*lc5x*sin(-q2+q5) + \\
& (1/2)*dq1*dq3*m5*lc5y*cos(-q2+q5) + (1/2)*dq1*dq3*m5*lc5x*sin(q2+q5) + (1/2)* \\
& *dq1*dq3*m5*lc5y*cos(q2+q5) - (1/8)*dq1*dq3*m5*lc5y^2*sin(q2+2*q5) - (1/2)* \\
& dq3*dq5*m5*lc5y^2*sin(2*q5+q4) + dq3*dq5*m5*lc5x*lc5y*cos(2*q5+q4) + (1/2)*dq3* \\
& 3*dq5*m5*lc5z*lc5y*sin(q4+q5) - (1/2)*dq3*dq5*m5*lc5z*lc5y*sin(q4-q5) - dq3* \\
& dq5*m5*lc5x*lc5y*cos(-2*q5+q4) - (1/2)*dq3*dq5*m5*lc5x*cos(q4+q5) - (1/2)* \\
& dq3*dq5*m5*d5*lc5x*cos(q4-q5) - (1/2)*dq3*dq5*m5*lc5z*cos(q4+q5) - (1/2)* \\
& *dq3*dq5*m5*lc5z*lc5x*cos(q4-q5) - (1/2)*dq3*dq5*m5*d5*lc5y*sin(q4-q5) + dq3* \\
& dq5*m5*q3*lc5y*sin(q5) - dq3*dq5*m5*q3*lc5x*cos(q5) - (1/2)*dq3*dq5*m5*lc5y* \\
& cos(q4-q5) - (1/2)*dq3*dq5*m5*lc5y*cos(q4+q5) + (1/2)*dq3*dq5*m5*lc5x*sin(q4- \\
& q5) - (1/2)*dq3*dq5*m5*lc5x*sin(q4+q5) - (1/4)*dq4*dq3*m5*lc5x^2*sin(-2*q5+ \\
& q4) + dq5*dq4*m5*q3*lc5y*sin(q4-q5) + dq5*dq4*m5*q3*lc5y*sin(q4+q5) + (1/2)* \\
& dq1*dq3*m5*lc5x*d5*cos(2*q4+q5+q2) + (1/2)*dq1*dq3*m4*q3*lc4x*cos(q2+q4) + (1/ \\
& 2)*dq1*dq3*m5*q3*lc5z*sin(q2+q4) + (1/4)*dq1*dq3*m5*q3*lc5x*cos(q2+q4- \\
& q5) + dq1*dq3*m4*lc4x*lc4z*cos(2*q4+q2) + (1/4)*dq1*dq3*m5*q3*lc5y*sin(q4-q2- \\
& q5) - (1/4)*dq1*dq3*m5*q3*lc5y*sin(q2+q4+q5) - (1/8)*dq1*dq3*m5*lc5x^2*sin(- \\
& 2*q5+2*q4+q2) + (1/8)*dq1*dq3*m5*lc5y^2*sin(2*q5+2*q4+q2) - (1/8)*dq1*dq3*m5* \\
& lc5x^2*sin(2*q5+2*q4+q2) + (1/2)*dq1*dq3*m4*lc4z^2*sin(2*q4+q2) + (1/8)*dq1*d \\
& q3*m5*lc5x^2*sin(q2+2*q5) + (1/2)*dq1*dq3*m5*lc5z^2*sin(2*q4+q2) - (1/2)*dq1* \\
& dq3*m5*d5^2*sin(q2) - (1/2)*dq1*dq3*m4*lc4z^2*sin(q2) - (1/4)*dq1*dq3*m5* \\
& lc5y^2*sin(2*q4+q2) - (1/2)*dq1*dq3*m5*lc5z^2*sin(q2) - (3/4)*dq1*dq3*m5* \\
& lc5y^2*sin(q2) + (1/2)*dq1*dq3*m5*d5^2*sin(2*q4+q2) - (3/4)*dq1*dq3*m5*lc5x^2* \\
& sin(q2) + (1/8)*dq1*dq3*m5*lc5y^2*sin(2*q5-q2) - (1/2)*dq1^2*m3*q3^2*sin(2* \\
& q2) + dq5*dq4*Iyx_5*cos(2*q5) + dq5*dq4*Ixy_5*cos(2*q5) + dq5*dq4*Ixx_5*sin(2* \\
& q5) - (1/4)*dq5*dq1*Izy_5*sin(q2+q4-q5) - (1/4)*dq5*dq1*Izx_5*cos(q2+q4-q5) + \\
& (1/4)*dq5*dq1*Izy_5*sin(q2+q4+q5) - dq3^2*m5*lc5y*cos(q5) - dq3^2*m5*lc5x*sin( \\
& q5) - (1/2)*dq2*dq1*Ixy_5*cos(q2+q4) + (1/4)*dq2*dq1*Iyz_5*sin(q2+q4+q5) - \\
& (1/4)*dq2*dq1*Ixz_5*cos(q2+q4+q5) + (1/4)*dq2*dq1*Ixx_5*cos(q2+q4-q5) + (1/4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& *dq2*dq1*Iyz_5*sin(q2+q4-q5)+(1/2)*dq2*dq1*Iyx_4*cos(q2+q4)+(1/2)*dq2*dq1 \\
& *Iyz_4*sin(q2+q4)+(1/2)*dq2*dq1*Iyz_2*sin(q2)+(1/2)*dq2*dq1*Iyx_2*cos(q2) \\
& -(1/2)*dq2*dq1*Izy_3*sin(q2)+(1/2)*dq2*dq1*Izx_3*cos(q2)+(1/2)*dq2*dq1 \\
& Iyx_5*cos(q2+q4)-(1/2)*dq2*dq1*cos(q2+q4)*Ixy_4-(1/2)*dq1^2*Ixx_4*sin(2* \\
& q2+2*q4)-(1/4)*dq1*dq3*m5*1c5x^2*sin(2*q4+q2)-(1/2)*dq1*dq3*m4*1c4x^2*sin \\
& (2*q4+q2)-dq1*dq3*m4*1c4y^2*sin(q2)-(1/2)*dq1*dq3*m4*1c4x^2*sin(q2)-dq2* \\
& dq4*m5*q3*1c5y*sin(q4-q5)+dq2*dq4*m5*q3*1c5y*sin(q4+q5)-dq2*dq4*m5*q3* \\
& 1c5x*cos(q4-q5)+dq5*dq4*m5*q3*1c5x*cos(q4-q5)-dq5*dq4*m5*q3*1c5x*cos(q4+ \\
& q5)+(1/2)*dq1*dq3*m5*q3*d5*sin(q2+q4)+(1/2)*dq1*dq3*m5*1c5x*d5*cos(2*q4- \\
& q5+q2)+(1/8)*dq1*dq3*m5*1c5y^2*sin(-2*q5+2*q4+q2)-(1/8)*dq1*dq3*m5*sin(2* \\
& q5-q2)*1c5x^2+dq5^2*Ixz_5*cos(q5)+2*dq2*dq3*m3*q3+2*dq2*dq3*m4*q3+2*dq2* \\
& dq3*m5*q3+dq1^2*m3*1c3y*q3*sin(2*q2)+dq1^2*m3*1c3x*1c3y*cos(2*q2)+(1/4)*d \\
& q1^2*m5*1c5x^2*sin(2*q2+2*q4)+(1/2)*dq1^2*m2*1c2x^2*sin(2*q2)+(1/8)*dq1^2 \\
& *m5*1c5x^2*sin(2*q5+2*q2+2*q4)-(1/2)*dq1^2*m5*d5^2*sin(2*q2+2*q4)+(1/4)* \\
& dq1^2*m5*1c5y^2*sin(2*q2+2*q4)-(1/2)*dq1*dq4*cos(q2+q4)*Ixy_4-(1/2)*dq1^2 \\
& *m4*1c4z^2*sin(2*q2+2*q4)-(1/2)*dq4^2*m5*q3*1c5y*sin(q4-q5)-(1/2)*dq4^2* \\
& m5*q3*1c5y*sin(q4+q5)-(1/2)*dq4^2*m5*q3*1c5x*cos(q4-q5)-(1/2)*dq4^2*m5*q3* \\
& 1c5x*cos(q4+q5)-dq4^2*m4*q3*1c4x*cos(q4)-dq4^2*m4*q3*1c4z*sin(q4)-dq4^2* \\
& m5*q3*d5*sin(q4)+(1/2)*dq5*dq1*m5*1c5y^2*sin(2*q5+q2+q4)-(1/2)*dq5*dq1*m5* \\
& 1c5x^2*sin(2*q5+q2+q4)-(1/2)*dq5*dq1*m5*1c5x^2*sin(-2*q5+q2+q4)+(1/2)* \\
& dq5*dq1*m5*1c5y^2*sin(-2*q5+q2+q4)+dq5*dq1*m5*1c5y*cos(-2*q5+q2+q4)- \\
& dq5*dq1*m5*1c5y*1c5x*cos(2*q5+q2+q4)-dq5*dq1*m5*1c5x^2*sin(q2+q4)-dq5*dq1* \\
& *m5*1c5y^2*sin(q2+q4)+dq5*dq1*m5*1c5y*sin(q2+q4-q5)-dq5*dq1*m5*d5*1c5y* \\
& sin(q2+q4+q5)+dq5*dq1*m5*d5*1c5x*cos(q2+q4-q5)+dq5*dq1*m5*d5*1c5x*cos(q2+ \\
& q4+q5)+dq5*dq1*m5*1c5z*1c5y*sin(q2+q4-q5)+dq5*dq1*m5*1c5z*1c5x*cos(q2+q4+ \\
& q5)-(1/4)*dq5*dq1*Ixz_5*cos(q2+q4+q5)-dq3^2*m4*1c4y+(1/2)*dq5^2*m5*q3* \\
& 1c5y*sin(q4+q5)-(1/2)*dq5^2*m5*q3*1c5x*cos(q4-q5)-(1/2)*dq5^2*m5*q3*1c5x* \\
& cos(q4+q5)+dq4*dq3*m4*1c4y*1c4x*cos(q4)+dq4*dq3*m4*1c4y*1c4z*sin(q4)+(1/2) \\
& *dq4*dq3*m5*d5*1c5y*sin(q4+q5)+(1/2)*dq4*dq3*m5*1c5x*1c5y*cos(2*q5+q4)+(1/2) \\
& *dq4*dq3*m5*1c5z*1c5y*sin(q4+q5)+(1/2)*dq4*dq3*m5*1c5z*1c5y*sin(q4- \\
& q5)+(1/4)*dq4*dq3*m5*1c5y^2*sin(-2*q5+q4)+(1/2)*dq4*dq3*m5*1c5x*1c5y*cos \\
& (-2*q5+q4)-(1/2)*dq4*dq3*m5*d5*1c5x*cos(q4+q5)+(1/2)*dq4*dq3*m5*d5*1c5x* \\
& cos(q4-q5)-(1/4)*dq4*dq3*m5*1c5y^2*sin(2*q5+q4)-(1/2)*dq4*dq3*m5*1c5z* \\
& 1c5x*cos(q4+q5)+(1/2)*dq4*dq3*m5*1c5z*1c5x*cos(q4-q5)+(1/2)*dq4*dq3*m5*d5* \\
& 1c5y*sin(q4-q5)+(1/4)*dq4*dq3*m5*1c5x^2*sin(2*q5+q4)-(1/2)*dq1^2*m5*q3^2* \\
& sin(2*q2)-(1/2)*dq2*dq1*cos(q2)*Ixz_3-(1/2)*dq2*dq1*sin(q2+q4)*Izy_4- \\
& (1/4)*dq2*dq1*Ixz_5*cos(q2+q4-q5)-(1/4)*dq2*dq1*Izy_5*sin(q2+q4-q5)-(1/4)* \\
& *dq2*dq1*Izy_5*sin(q2+q4+q5)+(1/4)*dq2*dq1*Ixz_5*cos(q2+q4+q5)-(1/2)*dq2* \\
& dq1*sin(q2)*Izy_2-(1/2)*dq2*dq1*cos(q2)*Ixy_2-(1/2)*dq1*dq4*Ixy_5*cos(q2+ \\
& q4)-(1/2)*dq1*dq4*sin(q2+q4)*Izy_4+(1/4)*dq1*dq4*Iyz_5*sin(q2+q4+q5)-(1/4) \\
& *dq1*dq4*Ixz_5*cos(q2+q4+q5)+(1/4)*dq1*dq4*Ixz_5*cos(q2+q4-q5)+(1/4)* \\
& dq1*dq4*Iyz_5*sin(q2+q4-q5)+(1/2)*dq1*dq4*Iyx_4*cos(q2+q4)+(1/2)*dq1*dq4* \\
& Iyz_4*sin(q2+q4)+(1/2)*dq1*dq4*Iyx_5*cos(q2+q4)+dq5*dq1*m5*1c5z*1c5x*cos( \\
& q2+q4-q5)-dq5*dq1*m5*1c5z*1c5y*sin(q2+q4+q5)+dq5*dq1*m5*q3*1c5x*cos(q2+ \\
& q5)+dq5*dq1*m5*q3*1c5x*cos(-q2+q5)-dq5*dq1*m5*q3*1c5y*sin(q2+q5)-dq5*dq1* \\
& *m5*q3*1c5y*sin(-q2+q5)-dq4^2*m5*q3*1c5z*sin(q4)+dq2*dq5*m5*1c5y^2*sin(2* \\
& q5)-2*dq2*dq5*m5*1c5x*1c5y*cos(2*q5)-dq2*dq5*m5*1c5x^2*sin(2*q5)+dq2*dq5* \\
& m5*q3*1c5y*sin(q4-q5)+dq2*dq5*m5*q3*1c5y*sin(q4+q5)+dq2*dq5*m5*q3*1c5x* \\
& cos(q4-q5)-dq2*dq5*m5*q3*1c5x*cos(q4+q5)+dq1*dq3*m4*1c4y*cos(q2)+(1/4)* \\
& dq1*dq3*m5*q3*1c5y*sin(q2+q4-q5)+(1/4)*dq1*dq3*m5*q3*1c5x*cos(q4-q2+q5)+ \\
& (1/2)*dq1*dq3*m5*1c5y*1c5z*sin(2*q4-q5+q2)-(1/4)*dq1*dq3*m5*1c5y*1c5x*cos \\
& (2*q5+2*q4+q2)-(1/2)*dq1*dq3*m5*1c5y*d5*sin(2*q4+q5+q2);
\end{aligned}$$

$V3 = dq2^2 * m3 * lc3y - dq2^2 * m3 * q3 - dq2^2 * m4 * q3 - dq2^2 * m5 * q3 + (1/2) * dq1^2 * m3 * lc3y -$   
 $(1/2) * dq1^2 * m3 * q3 - (1/2) * dq1^2 * m4 * q3 - (1/2) * dq1^2 * m5 * q3 + dq2 * dq3 * m4 * lc4y + (1/4) * dq4^2 * m5 * lc5y^2 * sin(-2*q5+q4) - (1/4) * dq4^2 * m5 * lc5y^2 * sin(2*q5+q4) + (1/4) * dq4^2 * m5 * lc5x^2 * sin(2*q5+q4) - (1/4) * dq4^2 * m5 * lc5x^2 * sin(-2*q5+q4) - (1/2) * dq2^2 * m5 * lc5y * cos(q4-q5) + (1/2) * dq2^2 * m5 * lc5y * cos(q4+q5) + (1/2) * dq2^2 * m5 * lc5x * sin(q4-q5) + (1/2) * dq2^2 * m5 * lc5x * sin(q4+q5) + dq2^2 * m4 * lc4x * sin(q4) -$   
 $dq2^2 * m4 * lc4z * cos(q4) - dq2^2 * m5 * d5 * cos(q4) - dq2^2 * m5 * lc5z * cos(q4) + (1/2) * dq1^2 * m5 * q3 * cos(2*q2) + (1/2) * dq1^2 * m3 * q3 * cos(2*q2) + (1/2) * dq1^2 * m4 * q3 * cos(2*q2) + (1/2) * dq1^2 * m4 * lc4z * cos(2*q2+q4) - (1/2) * dq1^2 * m4 * lc4x * sin(2*q2+q4) - (1/4) * dq1^2 * m5 * lc5x * sin(2*q2+q5+q4) + (1/2) * dq1^2 * m5 * d5 * cos(2*q2+q4) - (1/4) * dq1^2 * m5 * lc5x * sin(2*q2-q5+q4) - (1/4) * dq1^2 * m5 * lc5y * cos(2*q2+q4) + (1/2) * dq1^2 * m4 * lc4z * cos(2*q2-q4) - (1/2) * dq1^2 * m4 * lc4x * sin(2*q2-q4) - (1/4) * dq1^2 * m5 * lc5x * sin(2*q2-q5+q4) + (1/2) * dq1^2 * m5 * lc5y * cos(2*q2-q5+q4) + (1/4) * dq1^2 * m5 * lc5x * sin(q4-q5) + (1/4) * dq1^2 * m5 * lc5y * cos(q4+q5) + (1/2) * dq1^2 * m4 * lc4x * sin(q4) - (1/2) * dq1^2 * m4 * lc4z * cos(q4) - (1/2) * dq1^2 * m5 * d5 * cos(q4) - (1/2) * dq1^2 * m5 * lc5z * cos(q4) + dq4^2 * m4 * lc4y * lc4x * cos(q4) + dq4^2 * m4 * lc4y * lc4z * sin(q4) + (1/2) * dq4^2 * m5 * d5 * lc5y * sin(q4+q5) + dq3 * dq4 * m5 * lc5z * lc5x * cos(q5+2*q4) - (1/2) * dq2 * dq1 * m5 * lc5y * cos(q2+q5) - dq5 * dq4 * m5 * lc5y^2 * sin(q4) - dq5 * dq4 * m5 * lc5x^2 * sin(q4) - (1/2) * dq5^2 * m5 * d5 * lc5y * sin(q4+q5) - (1/2) * dq5^2 * m5 * lc5z * lc5y * sin(q4+q5) - (1/2) * dq5^2 * m5 * lc5z * lc5y * sin(q4-q5) + (1/2) * dq5^2 * m5 * d5 * lc5x * cos(q4+q5) - (1/2) * dq5^2 * m5 * lc5z * lc5x * cos(q4-q5) + (1/2) * dq5^2 * m5 * d5 * lc5y * sin(2*q5+2*q4) - (1/4) * dq3 * dq4 * m5 * lc5x^2 * sin(-2*q5+2*q4) + dq3 * dq4 * m5 * d5 * lc5x * cos(2*q4-q5) - dq3 * dq4 * m5 * lc5y * sin(2*q4-q5) + (1/4) * dq1 * dq5 * m5 * lc5y * sin(2*q4-q5) + (1/4) * dq1 * dq5 * m5 * lc5z * lc5y * sin(-2*q5+2*q4+q2) + (1/2) * dq4^2 * m5 * lc5x * lc5y * cos(2*q5+q4) + (1/2) * dq4^2 * m5 * lc5z * lc5y * sin(q4+q5) + (1/2) * dq4^2 * m5 * lc5x * lc5y * cos(-2*q5+q4) - (1/2) * dq4^2 * m5 * d5 * lc5x * cos(q4+q5) + (1/2) * dq4^2 * m5 * d5 * lc5x * cos(q4-q5) - (1/2) * dq4^2 * m5 * d5 * lc5y * sin(q4-q5) + (1/2) * dq4^2 * m5 * lc5z * lc5x * cos(q4-q5) + (1/2) * dq4^2 * m5 * lc5z * lc5y * sin(q4-q5) - dq2 * dq1 * m4 * lc4y * cos(q2) - (1/2) * dq2 * dq1 * m5 * lc5x * sin(-q2+q5) - (1/2) * dq2 * dq1 * m5 * lc5x * sin(q2+q5) - (1/2) * dq2 * dq1 * m5 * lc5y * cos(-q2+q5) + (1/2) * dq1 * dq5 * m5 * lc5x * lc5z * cos(2*q4-q5+q2) - (1/2) * dq1 * dq5 * m5 * lc5x * lc5z * cos(2*q4+q5+q2) - (1/4) * dq1 * dq5 * m5 * q3 * lc5x * cos(q4-q2-q5) - (1/2) * dq1 * dq5 * m5 * lc5y * lc5x * cos(q2+2*q5) + (1/2) * dq1 * dq5 * m5 * lc5y * lc5z * sin(2*q4+q5+q2) + (1/2) * dq1 * dq5 * m5 * lc5y * lc5x * cos(-2*q5+2*q4+q2) + (1/2) * dq1 * dq5 * m5 * lc5y * d5 * sin(2*q4-q5+q2) - (1/2) * dq1 * dq5 * m5 * lc5x * d5 * cos(2*q4+q5+q2) + (1/4) * dq1 * dq5 * m5 * q3 * lc5x * cos(q2+q4-q5) - (1/4) * dq1 * dq5 * m5 * q3 * lc5y * sin(q4-q2-q5) + (1/4) * dq1 * dq5 * m5 * q3 * lc5y * sin(q4-q2-q5) - (1/4) * dq1 * dq5 * m5 * sin(2*q5-q2) * lc5x^2 + (1/4) * dq1 * dq5 * m5 * lc5y * sin(q2+2*q5) - (1/4) * dq1 * dq5 * m5 * lc5x * sin(-2*q5+2*q4+q2) + (1/4) * dq1 * dq5 * m5 * lc5y * sin(2*q5-q2) - (1/4) * dq1 * dq5 * m5 * lc5y * sin(2*q5+2*q4+q2) - (1/2) * dq2 * dq5 * m5 * lc5z * lc5x * cos(q4-q5) - (1/2) * dq2 * dq5 * m5 * lc5y * sin(q4-q5) + dq2 * dq5 * m5 * q3 * lc5y * sin(q5) - dq2 * dq5 * m5 * q3 * lc5x * cos(q5) + (1/2) * dq2 * dq5 * m5 * lc5y * cos(q4-q5) + (1/2) * dq2 * dq5 * m5 * lc5x * sin(q4+q5) - (1/2) * dq3 * dq5 * m5 * lc5y * sin(-2*q5+2*q4) - (1/4) * dq3 * dq5 * m5 * lc5x * sin(2*q5+2*q4) - (1/2) * dq3 * dq5 * m5 * lc5x * sin(2*q5+2*q4) + (1/4) * dq3 * dq5 * m5 * lc5x * sin(-2*q5+2*q4) + (1/2) * dq3 * dq5 * m5 * lc5z * lc5x * cos(q5+2*q4) - (1/2) * dq3 * dq5 * m5 * lc5y * sin(q5+2*q4) - (1/2) * dq3 * dq5 * m5 * lc5y * sin(q5+2*q4) - (1/2) * dq3 * dq5 * m5 * lc5y * cos(2*q5+2*q4) - (1/2) * dq3 * dq5 * m5 * lc5y * sin(2*q4-q5) + dq3 * dq4 * m5 * lc5z * sin(2*q4) + (1/4) * dq3 * dq4 * m5 * lc5y * sin(2*q4) + dq3 * dq4 * m4 * lc4z * sin(2*q4) + dq3 * dq4 * m5 * d5 * sin(2*q4)$

$$\begin{aligned}
& q4 - dq3 * dq4 * m4 * l1c4x^2 * \sin(2 * q4) - (1/2) * dq3 * dq4 * m5 * l1c5x^2 * \sin(2 * q4) - (1/4) * \\
& dq3 * dq4 * m5 * l1c5x^2 * \sin(2 * q5 + 2 * q4) - (1/2) * dq3 * dq4 * m5 * l1c5y^2 * \sin(2 * q4) + dq3 * \\
& dq4 * m5 * d5 * l1c5x * \cos(q5 + 2 * q4) - dq3 * dq4 * m5 * d5 * l1c5y * \sin(q5 + 2 * q4) + 2 * dq3 * dq4 * m4 * \\
& l1c4x * l1c4z * \cos(2 * q4) + (1/2) * dq3 * dq4 * m5 * l1c5y * l1c5x * \cos(-2 * q5 + 2 * q4) - (1/2) * \\
& dq3 * dq4 * m5 * l1c5y * l1c5x * \cos(2 * q5 + 2 * q4) + dq3 * dq4 * m5 * l1c5y * l1c5z * \sin(2 * q4 - q5) + 2 * \\
& dq3 * dq4 * m5 * l1c5z * d5 * \sin(2 * q4) - (1/4) * dq1 * dq5 * m5 * q3 * l1c5x * \cos(q2 + q4 + q5) - \\
& (1/2) * dq1 * dq5 * m5 * l1c5y * l1c5x * \cos(2 * q5 - q2) + (1/2) * dq1 * dq5 * m5 * l1c5x * d5 * \cos(2 * q4 \\
& - q5 + q2) + (1/4) * dq1 * dq5 * m5 * q3 * l1c5y * \sin(q2 + q4 - q5) + (1/4) * dq1 * dq5 * m5 * q3 * l1c5x * \\
& \cos(q4 - q2 + q5) + (1/2) * dq1 * dq5 * m5 * l1c5y * l1c5z * \sin(2 * q4 - q5 + q2) + (1/2) * dq1 * dq5 * \\
& m5 * l1c5y * l1c5x * \cos(2 * q5 + 2 * q4 + q2) + (1/2) * dq1 * dq5 * m5 * l1c5y * d5 * \sin(2 * q4 + q5 + q2) - \\
& (1/4) * dq1 * dq5 * m5 * q3 * l1c5y * \sin(q4 - q2 + q5) + (1/4) * dq1 * dq5 * m5 * l1c5x^2 * \sin(2 * q5 \\
& + 2 * q4 + q2) - (1/4) * dq1 * dq5 * m5 * l1c5x^2 * \sin(q2 + 2 * q5) + dq2 * dq3 * m5 * l1c5y * \cos(q5) + \\
& dq2 * dq3 * m5 * l1c5x * \sin(q5) + dq4 * dq2 * m4 * l1c4y * l1c4z * \sin(q4) + dq4 * dq2 * m4 * l1c4y * l1c4x * \\
& \cos(q4) + (1/4) * dq4 * dq2 * m5 * l1c5x^2 * \sin(2 * q5 + q4) + (1/4) * dq4 * dq2 * m5 * l1c5y^2 * \sin \\
& (-2 * q5 + q4) - (1/4) * dq4 * dq2 * m5 * l1c5x^2 * \sin(-2 * q5 + q4) - (1/4) * dq4 * dq2 * m5 * l1c5y^2 * \\
& \sin(2 * q5 + q4) + (1/2) * dq4 * dq2 * m5 * d5 * l1c5y * \sin(q4 + q5) + (1/2) * dq4 * dq2 * m5 * l1c5x * l1c5y * \\
& \cos(2 * q5 + q4) + (1/2) * dq4 * dq2 * m5 * l1c5z * l1c5y * \sin(q4 + q5) + (1/2) * dq4 * dq2 * m5 * l1c5z * \\
& l1c5y * \sin(q4 - q5) + (1/2) * dq4 * dq2 * m5 * l1c5x * l1c5y * \cos(-2 * q5 + q4) - (1/2) * dq4 * dq2 * \\
& m5 * d5 * l1c5x * \cos(q4 + q5) + (1/2) * dq4 * dq2 * m5 * d5 * l1c5x * \cos(q4 - q5) - (1/2) * dq4 * dq2 * \\
& m5 * l1c5z * l1c5x * \cos(q4 + q5) + (1/2) * dq4 * dq2 * m5 * l1c5z * l1c5x * \cos(q4 - q5) + (1/2) * dq4 * \\
& dq2 * m5 * d5 * l1c5y * \sin(q4 - q5) - (1/2) * dq4 * dq2 * m5 * l1c5y * \cos(q4 - q5) + (1/2) * dq4 * dq2 * \\
& m5 * l1c5y * \cos(q4 + q5) + (1/2) * dq4 * dq2 * m5 * l1c5x * \sin(q4 - q5) + (1/2) * dq4 * dq2 * m5 * l1c5x * \\
& \sin(q4 + q5) + dq4 * dq2 * m4 * l1c4x * \sin(q4) - dq4 * dq2 * m4 * l1c4z * \cos(q4) - dq4 * dq2 * m5 * d5 * \\
& \cos(q4) - dq4 * dq2 * m5 * l1c5z * \cos(q4) + dq5 * dq4 * m5 * l1c5x * l1c5y * \cos(2 * q5 + q4) - (1/2) * \\
& dq5 * dq4 * m5 * l1c5y^2 * \sin(-2 * q5 + q4) - dq5 * dq4 * m5 * l1c5x * l1c5y * \cos(-2 * q5 + q4) - (1/2) * \\
& dq5 * dq4 * m5 * l1c5y^2 * \sin(2 * q5 + q4) + (1/2) * dq5 * dq4 * m5 * l1c5x^2 * \sin(2 * q5 + q4) + (1/2) * \\
& * dq5 * dq4 * m5 * l1c5x^2 * \sin(-2 * q5 + q4) + (1/2) * dq1 * dq5 * m5 * l1c5x * \sin(q2 + q5) - (1/2) * \\
& dq1 * dq5 * m5 * l1c5x * \sin(-q2 + q5) + (1/2) * dq1 * dq5 * m5 * l1c5y * \cos(q2 + q5) - (1/2) * dq1 * \\
& dq5 * m5 * l1c5y * \cos(-q2 + q5) + (1/2) * dq2 * dq1 * m4 * l1c4z * \sin(q2) + (1/4) * dq2 * dq1 * m5 * \\
& l1c5y^2 * \sin(2 * q4 + q2) + (1/2) * dq2 * dq1 * m5 * l1c5z * \sin(q2) + (3/4) * dq2 * dq1 * m5 * l1c5y^2 * \\
& \sin(q2) - (1/2) * dq2 * dq1 * m5 * d5 * \sin(2 * q4 + q2) + (3/4) * dq2 * dq1 * m5 * l1c5x^2 * \sin(q2) - \\
& (1/4) * dq2 * dq1 * m5 * q3 * l1c5x * \cos(q2 + q4 + q5) + (1/4) * dq2 * dq1 * m5 * l1c5y * l1c5x * \\
& \cos(2 * q5 - q2) - (1/2) * dq2 * dq1 * m5 * q3 * d5 * \sin(q2 + q4) - (1/2) * dq2 * dq1 * m5 * l1c5x * d5 * \\
& \cos(2 * q4 - q5 + q2) - (1/4) * dq2 * dq1 * m5 * q3 * l1c5y * \sin(q2 + q4 - q5) - (1/4) * dq2 * dq1 * m5 * \\
& q3 * l1c5x * \cos(q4 - q2 + q5) - (1/2) * dq2 * dq1 * m5 * l1c5y * l1c5z * \sin(2 * q4 - q5 + q2) + (1/4) * \\
& dq2 * dq1 * m5 * l1c5y * l1c5x * \cos(2 * q5 + 2 * q4 + q2) + (1/2) * dq2 * dq1 * m5 * l1c5y * d5 * \sin(2 * q4 + \\
& q5 + q2) - (1/2) * dq2 * dq1 * m5 * q3 * d5 * \sin(-q2 + q4) + (1/4) * dq2 * dq1 * m5 * q3 * l1c5y * \sin(q4 - \\
& q2 + q5) - (1/2) * dq2 * dq1 * m5 * q3 * l1c5z * \sin(-q2 + q4) - (1/2) * dq2 * dq1 * m5 * l1c5x * l1c5z * \\
& \cos(2 * q4 - q5 + q2) - (1/2) * dq2 * dq1 * m5 * l1c5x * l1c5z * \cos(2 * q4 + q5 + q2) - (1/4) * dq2 * dq1 * \\
& m5 * q3 * l1c5x * \cos(q4 - q2 - q5) - (1/4) * dq2 * dq1 * m5 * l1c5y * l1c5x * \cos(q2 + 2 * q5) + (1/2) * \\
& dq2 * dq1 * m5 * l1c5y * l1c5z * \sin(2 * q4 + q5 + q2) - (1/4) * dq2 * dq1 * m5 * l1c5y * l1c5x * \cos(- \\
& 2 * q5 + 2 * q4 + q2) - (1/2) * dq2 * dq1 * m5 * l1c5y * d5 * \sin(2 * q4 - q5 + q2) - (1/2) * dq2 * dq1 * m4 * \\
& q3 * l1c4x * \cos(-q2 + q4) - (1/2) * dq2 * dq1 * m4 * q3 * l1c4z * \sin(-q2 + q4) - (1/2) * dq2 * dq1 * m4 * \\
& q3 * l1c4z * \sin(q2 + q4) - (1/2) * dq2 * dq1 * m5 * l1c5x * d5 * \cos(2 * q4 + q5 + q2) - (1/2) * dq2 * \\
& dq1 * m4 * q3 * l1c4x * \cos(q2 + q4) - (1/2) * dq2 * dq1 * m5 * q3 * l1c5z * \sin(q2 + q4) - (1/4) * dq2 * \\
& dq1 * m5 * q3 * l1c5x * \cos(q2 + q4 - q5) - dq2 * dq1 * m4 * l1c4x * l1c4z * \cos(2 * q4 + q2) - (1/4) * dq2 * \\
& dq1 * m5 * q3 * l1c5y * \sin(q4 - q2 - q5) + (1/4) * dq2 * dq1 * m5 * q3 * l1c5y * \sin(q2 + q4 + q5) - dq2 * \\
& dq1 * m5 * l1c5z * d5 * \sin(2 * q4 + q2) - (1/8) * dq2 * dq1 * m5 * l1c5y^2 * \sin(-2 * q5 + 2 * q4 + q2) + \\
& (1/8) * dq2 * dq1 * m5 * \sin(2 * q5 - q2) * l1c5x^2 + (1/8) * dq2 * dq1 * m5 * l1c5y^2 * \sin(q2 + 2 * q5) + \\
& (1/4) * dq2 * dq1 * m5 * l1c5x^2 * \sin(2 * q4 + q2) + (1/2) * dq2 * dq1 * m4 * l1c4x^2 * \sin(2 * q4 + q2) + \\
& (1/2) * dq2 * dq1 * m4 * l1c4x * \sin(q2) + (1/8) * dq2 * dq1 * m5 * l1c5x^2 * \sin(-2 * q5 + 2 * q4 \\
& + q2) - (1/8) * dq2 * dq1 * m5 * l1c5y^2 * \sin(2 * q5 - q2) - (1/8) * dq2 * dq1 * m5 * l1c5y^2 * \sin(2 * \\
& q5 + 2 * q4 + q2) + (1/8) * dq2 * dq1 * m5 * l1c5x^2 * \sin(2 * q5 + 2 * q4 + q2) - (1/2) * dq2 * dq1 * m4 * \\
& l1c4z * \sin(2 * q4 + q2) - (1/8) * dq2 * dq1 * m5 * l1c5x * \sin(q2 + 2 * q5) - (1/2) * dq2 * dq1 * \\
& m5 * l1c5z * \sin(2 * q4 + q2) + (1/2) * dq2 * dq1 * m5 * d5 * \sin(q2) + dq2 * dq1 * m5 * l1c5z * d5 * \\
& \sin(q2) + dq2 * dq1 * m4 * l1c4y * \sin(q2) + (1/2) * dq1 * dq4 * m5 * l1c5y * \sin(2 * q4 + q2) -
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& d q_1 * d q_4 * m_5 * d_5^2 * \sin(2 * q_4 + q_2) - (1/4) * d q_1 * d q_4 * m_5 * q_3 * 1c5x * \cos(q_2 + q_4 + q_5) - (1/2) * d q_1 * d q_4 * m_5 * q_3 * d_5 * \sin(q_2 + q_4) - d q_1 * d q_4 * m_5 * 1c5x * d_5 * \cos(2 * q_4 - q_5 + q_2) - (1/4) * d q_1 * d q_4 * m_5 * q_3 * 1c5y * \sin(q_2 + q_4 - q_5) + (1/4) * d q_1 * d q_4 * m_5 * q_3 * 1c5x * \cos(q_4 - q_2 + q_5) - d q_1 * d q_4 * m_5 * 1c5y * 1c5z * \sin(2 * q_4 - q_5 + q_2) + (1/2) * d q_1 * d q_4 * m_5 * 1c5y * 1c5x * \cos(2 * q_5 + 2 * q_4 + q_2) + d q_1 * d q_4 * m_5 * 1c5y * d_5 * \sin(2 * q_4 + q_5 + q_2) + (1/2) * d q_1 * d q_4 * m_5 * q_3 * d_5 * \sin(-q_2 + q_4) - (1/4) * d q_1 * d q_4 * m_5 * q_3 * 1c5y * \sin(q_4 - q_2 + q_5) + (1/2) * d q_1 * d q_4 * m_5 * q_3 * 1c5z * \sin(-q_2 + q_4) - d q_1 * d q_4 * m_5 * 1c5x * 1c5z * \cos(2 * q_4 - q_5 + q_2) - d q_1 * d q_4 * m_5 * 1c5x * 1c5z * \cos(2 * q_4 + q_5 + q_2) + (1/4) * d q_1 * d q_4 * m_5 * q_3 * 1c5x * \cos(q_4 - q_2 - q_5) + d q_1 * d q_4 * m_5 * 1c5y * 1c5z * \sin(2 * q_4 + q_5 + q_2) - (1/2) * d q_1 * d q_4 * m_5 * 1c5y * 1c5x * \cos(-2 * q_5 + 2 * q_4 + q_2) - d q_1 * d q_4 * m_5 * 1c5y * d_5 * \sin(2 * q_4 - q_5 + q_2) + (1/2) * d q_1 * d q_4 * m_4 * q_3 * 1c4x * \cos(-q_2 + q_4) + (1/2) * d q_1 * d q_4 * m_4 * q_3 * 1c4z * \sin(-q_2 + q_4) - (1/2) * d q_1 * d q_4 * m_4 * q_3 * 1c4z * \sin(q_2 + q_4) - d q_1 * d q_4 * m_5 * 1c5x * d_5 * \cos(2 * q_4 + q_5 + q_2) - (1/2) * d q_1 * d q_4 * m_4 * q_3 * 1c4x * \cos(q_2 + q_4) - (1/2) * d q_1 * d q_4 * m_5 * q_3 * 1c5z * \sin(q_2 + q_4) - (1/4) * d q_1 * d q_4 * m_5 * q_3 * 1c5x * \cos(q_2 + q_4 - q_5) - 2 * d q_1 * d q_4 * m_4 * 1c4x * 1c4z * \cos(2 * q_4 + q_2) + (1/4) * d q_1 * d q_4 * m_5 * q_3 * 1c5y * \sin(q_4 - q_2 - q_5) + (1/4) * d q_1 * d q_4 * m_5 * q_3 * 1c5y * \sin(q_2 + q_4 + q_5) - 2 * d q_1 * d q_4 * m_5 * 1c5z * d_5 * \sin(2 * q_4 + q_2) - (1/4) * d q_1 * d q_4 * m_5 * 1c5y * ^2 * \sin(-2 * q_5 + 2 * q_4 + q_2) + (1/2) * d q_1 * d q_4 * m_5 * 1c5x * ^2 * \sin(2 * q_4 + q_2) + d q_1 * d q_4 * m_4 * 1c4x * ^2 * \sin(2 * q_4 + q_2) + (1/4) * d q_1 * d q_4 * m_5 * 1c5x * ^2 * \sin(-2 * q_5 + 2 * q_4 + q_2) - (1/4) * d q_1 * d q_4 * m_5 * 1c5y * ^2 * \sin(2 * q_5 + 2 * q_4 + q_2) + (1/4) * d q_1 * d q_4 * m_5 * 1c5x * ^2 * \sin(2 * q_5 + 2 * q_4 + q_2) - d q_1 * d q_4 * m_4 * 1c4z * ^2 * \sin(2 * q_4 + q_2) - d q_1 * d q_4 * m_5 * 1c5z * ^2 * \sin(2 * q_4 + q_2) + (1/2) * d q_2 * d q_5 * m_5 * 1c5x * ^2 * \sin(2 * q_5 + q_4) - (1/2) * d q_2 * d q_5 * m_5 * 1c5y * ^2 * \sin(-2 * q_5 + q_4) + (1/2) * d q_2 * d q_5 * m_5 * 1c5x * ^2 * \sin(-2 * q_5 + q_4) - (1/2) * d q_2 * d q_5 * m_5 * 1c5y * ^2 * \sin(2 * q_5 + q_4) + (1/2) * d q_2 * d q_5 * m_5 * d_5 * 1c5y * \sin(q_4 + q_5) + d q_2 * d q_5 * m_5 * 1c5x * 1c5y * \cos(2 * q_5 + q_4) + (1/2) * d q_2 * d q_5 * m_5 * 1c5z * 1c5y * \sin(q_4 + q_5) - (1/2) * d q_2 * d q_5 * m_5 * 1c5z * 1c5y * \sin(q_4 - q_5) - d q_2 * d q_5 * m_5 * 1c5x * 1c5y * \cos(-2 * q_5 + q_4) - (1/2) * d q_2 * d q_5 * m_5 * d_5 * 1c5x * \cos(q_4 + q_5) - (1/2) * d q_2 * d q_5 * m_5 * 1c5z * 1c5x * \cos(q_4 + q_5);
\end{aligned}$$

```

V4=-(1/2)*dq2^2*m5*q3*1c5y*sin(q4+q5)+(1/2)*dq2^2*m5*q3*1c5x*cos(q4-q5)+  

(1/2)*dq2^2*m5*q3*1c5x*cos(q4+q5)+(1/2)*dq2*dq3*m5*1c5y*cos(q4-q5)-(1/2)*  

dq2*dq3*m5*1c5y*cos(q4+q5)-(1/2)*dq2*dq3*m5*1c5x*sin(q4-q5)-(1/2)*dq2*dq3*  

*m5*1c5x*sin(q4+q5)-dq2*dq3*m4*1c4x*sin(q4)+dq2*dq3*m4*1c4z*cos(q4)+dq2*  

dq3*m5*d5*cos(q4)+dq2*dq3*m5*1c5z*cos(q4)+(1/2)*dq3*dq5*m5*1c5x^2*sin(2*q  

5+q4)-(1/2)*dq3*dq5*m5*1c5y^2*sin(-2*q5+q4)+(1/2)*dq3*dq5*m5*1c5x^2*sin(-  

2*q5+q4)+dq3*dq5*m5*1c5y*sin(q4+q5)+(1/4)*dq1^2*Ixz_5*cos(2*q2+2*q4+q5)  

)-(1/4)*dq1^2*Izy_5*sin(2*q2+2*q4+q5)+(1/4)*dq1^2*Ixz_5*cos(2*q2+2*q4-q5)  

-(1/4)*dq1^2*Ixx_5*sin(2*q2+2*q4)+(1/2)*dq1^2*Izz_5*sin(2*q2+2*q4)-(1/8)*  

dq1^2*Ixx_5*sin(2*q5+2*q2+2*q4)+(1/8)*dq1^2*Iyy_5*sin(2*q5+2*q2+2*q4)+(1/  

4)*dq1^2*Iyz_5*sin(2*q2+2*q4-q5)-(1/4)*dq1^2*Iyy_5*sin(2*q2+2*q4)-(1/8)*  

dq1^2*Ixy_5*cos(2*q5+2*q2+2*q4)+(1/2)*dq1^2*m4*q3*1c4x*cos(q4)+(1/2)*dq1^  

2*m5*q3*d5*sin(q4)+(1/2)*dq1^2*m5*q3*1c5z*sin(q4)+dq2^2*m4*q3*1c4x*cos(q4)  

+dq2^2*m4*q3*1c4z*sin(q4)+dq2^2*m5*q3*d5*sin(q4)+dq2^2*m5*q3*1c5z*sin(q4)  

+(1/2)*dq1^2*m4*q3*1c4z*sin(q4)+(1/4)*dq1^2*m5*q3*1c5y*sin(q4-q5)+dq3*  

dq5*m5*1c5x^2*sin(q4)+2*dq1*dq3*m5*1c5z*d5*sin(2*q4+q2)+(1/4)*dq1*dq3*m5*  

q3*1c5x*cos(q2+q4+q5)-(1/2)*dq1*dq3*m5*q3*d5*sin(-q2+q4)+(1/4)*dq1*dq3*m5*  

*q3*1c5y*sin(q4-q2+q5)-(1/2)*dq1*dq3*m5*q3*1c5z*sin(-q2+q4)+dq1*dq3*m5*  

1c5x*1c5z*cos(2*q4-q5+q2)+dq1*dq3*m5*1c5x*1c5z*cos(2*q4+q5+q2)-(1/4)*dq1*  

*dq3*m5*q3*1c5x*cos(q4-q2-q5)-dq1*dq3*m5*1c5y*1c5z*sin(2*q4+q5+q2)+(1/2)*  

dq1*dq3*m5*1c5y*1c5x*cos(-2*q5+2*q4+q2)+dq1*dq3*m5*1c5y*d5*sin(2*q4-q5+  

q2)-(1/2)*dq1*dq3*m4*q3*1c4x*cos(-q2+q4)-(1/2)*dq1*dq3*m4*q3*1c4z*sin(-  

q2+q4)+(1/2)*dq1*dq3*m4*q3*1c4z*sin(q2+q4)-dq5*dq1*sin(q2+q4)*Izz_5+(1/2)*  

*dq2^2*m5*q3*1c5y*sin(q4-q5)-(1/4)*dq1^2*m5*q3*1c5y*sin(q4+q5)+(1/4)*  

dq1^2*m5*q3*1c5x*cos(q4-q5)+(1/4)*dq1^2*m5*q3*1c5x*cos(q4+q5)-(1/8)*dq3^2*  

*m5*1c5y^2*sin(-2*q5+2*q4)-(1/2)*dq3^2*m4*1c4z^2*sin(2*q4)-(1/2)*dq3^2*

```

$$\begin{aligned}
& m5^*d5^2*\sin(2*q4)+(1/2)*dq3^2*m4*lc4x^2*\sin(2*q4)+(1/4)*dq3^2*m5*lc5x^2*\sin(2*q4)+(1/8)*dq3^2*m5*lc5x^2*\sin(2*q5+2*q4)+(1/4)*dq3^2*m5*lc5y^2*\sin(2*q4)-(1/8)*dq3^2*m5*lc5y^2*\sin(2*q5+2*q4)+(1/8)*dq3^2*m5*lc5x^2*\sin(-2*q5+2*q4)-(1/8)*dq1^2*Iyx_5*\cos(2*q5+2*q2+2*q4)+(1/4)*dq1^2*Izx_5*\cos(2*q2+2*q4+q5)+(1/8)*dq1^2*Iyx_5*\cos(-2*q5+2*q2+2*q4)+(1/4)*dq1^2*Izy_5*\sin(2*q2+2*q4-q5)+(1/8)*dq1^2*Ixy_5*\cos(-2*q5+2*q2+2*q4)+(1/8)*dq1^2*Iyy_5*\sin(-2*q5+2*q2+2*q4)-(1/8)*dq1^2*Ixx_5*\sin(-2*q5+2*q2+2*q4)-(1/4)*dq1^2*Iyz_5*\sin(2*q2+2*q4+q5)+(1/4)*dq1^2*Izx_5*\cos(2*q2+2*q4-q5)-dq5^2*Iyz_5*\sin(q5)+(1/2)*dq1^2*Ixz_4*\cos(2*q2+2*q4)+(1/2)*dq1^2*Izz_4*\sin(2*q2+2*q4)+dq5*dq4*m5*lc5y^2*\sin(2*q5)-2*dq5*dq4*m5*lc5x*lc5y*\cos(2*q5)-dq5*dq4*m5*lc5x^2*\sin(2*q5)+dq5^2*m5*lc5z*lc5y*\sin(q5)-dq5^2*m5*lc5z*lc5x*\cos(q5)-dq5^2*m5*d5*lc5x*\cos(q5)+dq5^2*m5*lc5y*\sin(q5)-(1/4)*dq1^2*m5*lc5x*lc5y*\cos(-2*q5+2*q2+2*q4)-(1/2)*dq1^2*m5*lc5x*lc5z*\cos(2*q2+2*q4-q5)+(1/2)*dq1^2*m5*lc5y*d5*\sin(2*q2+2*q4+q5)+(1/4)*dq1^2*m5*lc5x*lc5y*\cos(2*q5+2*q2+2*q4)+(1/2)*dq1^2*m5*lc5y*lc5z*\sin(2*q2+2*q4+q5)-dq1^2*m4*lc4x*lc4z*\cos(2*q2+2*q4)-(1/2)*dq1^2*m5*lc5x*lc5z*\cos(2*q2+2*q4+q5)-dq1^2*m5*lc5z*d5*\sin(2*q2+2*q4)-(1/4)*dq1^2*m5*lc5x*q3*\cos(2*q2+q5+q4)-(1/2)*dq1^2*m4*q3*lc4z*\sin(2*q2+q4)-(1/2)*dq1^2*m5*d5*q3*\sin(2*q2+q4)-(1/4)*dq1^2*m5*lc5x*q3*\cos(2*q2-q5+q4)-(1/2)*dq1^2*m5*lc5z*q3*\sin(2*q2+q4)+(1/4)*dq1^2*m5*lc5y*q3*\sin(2*q2+q5+q4)-(1/4)*dq1^2*m5*lc5y*q3*\sin(2*q2-q5+q4)-(1/2)*dq1^2*m5*lc5y*d5*\sin(2*q2+2*q4-q5)-(1/2)*dq1^2*m5*lc5y*lc5z*\sin(2*q2+2*q4-q5)-(1/2)*dq5*dq1*Iyy_5*\sin(2*q5+q2+q4)+(3/4)*dq5*dq1*Iyz_5*\sin(q2+q4+q5)-(3/4)*dq5*dq1*Ixz_5*\cos(q2+q4+q5)+(1/2)*dq5*dq1*Ixy_5*\cos(2*q5+q2+q4)+(1/2)*dq5*dq1*Iyy_5*\sin(2*q5+q2+q4)+(1/2)*dq5*dq1*Ixx_5*\sin(-2*q5+q2+q4)-(1/2)*dq5*dq1*Iyz_5*\sin(-2*q5+q2+q4)-(1/2)*dq5*dq1*Ixy_5*\cos(-2*q5+q2+q4)-(3/4)*dq5*dq1*Ixz_5*\cos(q2+q4-q5)-(3/4)*dq5*dq1*Iyz_5*\sin(q2+q4-q5)+(1/2)*dq5*dq1*Iyx_5*\cos(2*q5+q2+q4)-(1/8)*dq1^2*m5*lc5y^2*\sin(2*q5+2*q2+2*q4)+(1/2)*dq1^2*m4*lc4x^2*\sin(2*q2+2*q4)+(1/8)*dq1^2*m5*lc5x^2*\sin(-2*q5+2*q2+2*q4)-(1/8)*dq1^2*m5*lc5y^2*\sin(-2*q5+2*q2+2*q4)-(1/2)*dq1^2*m5*lc5z^2*\sin(2*q2+2*q4)-(1/4)*dq1*dq4*Izx_5*\cos(q2+q4-q5)-(1/4)*dq1*dq4*Izy_5*\sin(q2+q4-q5)-(1/4)*dq1*dq4*Iyy_5*\sin(q2+q4+q5)+(1/4)*dq1*dq4*Izx_5*\cos(q2+q4+q5)-dq2*dq5*Iyy_5*\sin(2*q5)+dq2*dq5*Iyx_5*\cos(2*q5)+dq2*dq5*Ixy_5*\cos(2*q5)+dq2*dq5*Ixx_5*\sin(2*q5)-dq5*dq4*Iyy_5*\sin(2*q5)+(1/2)*dq1^2*Izx_4*\cos(2*q2+2*q4)-(1/2)*dq1^2*m5*lc5x*d5*cos(2*q2+2*q4+q5)-(1/2)*dq3*dq5*m5*lc5y^2*\sin(2*q5+q4)+dq3*dq5*m5*lc5x*lc5y*\cos(2*q5+q4)+dq3*dq5*m5*lc5z*lc5y*\sin(q4+q5)-dq3*dq5*m5*lc5x*lc5y*\cos(-2*q5+q4)-dq3*dq5*m5*d5*lc5x*\cos(q4+q5)-dq3*dq5*m5*d5*lc5x*cos(q4-q5)-dq3*dq5*m5*lc5z*lc5x*\cos(q4-q5)-dq3*dq5*m5*lc5z*lc5y*\sin(q4-q5)+dq1*dq3*m5*lc5x*d5*cos(2*q4-q2)+(1/2)*dq1*dq3*m4*lc4x*\cos(q2+q4)+(1/2)*dq1*dq3*m5*lc5z*\sin(q2+q4)+(1/4)*dq1*dq3*m5*lc5x*cos(q2+q4-q5)+2*dq1*dq3*m4*lc4x*lc4z*\cos(2*q4+q2)-(1/4)*dq1*dq3*m5*lc5y*\sin(q4-q2-q5)-(1/4)*dq1*dq3*m5*lc5y*\sin(q2+q4+q5)-(1/4)*dq1*dq3*m5*lc5x^2*\sin(-2*q5+2*q4+q2)+(1/4)*dq1*dq3*m5*lc5y^2*\sin(2*q5+2*q4+q2)-(1/4)*dq1*dq3*m5*lc5x^2*\sin(2*q5+2*q4+q2)+dq1*dq3*m5*lc5z^2*\sin(2*q4+q2)-(1/2)*dq1*3*m5*lc5y^2*\sin(2*q4+q2)+dq1*dq3*m5*d5^2*\sin(2*q4+q2)-dq2*dq3*m4*lc4y*lc4x*\cos(q4)-dq2*dq3*m4*lc4z*\sin(q4)-(1/2)*dq2*dq3*m5*lc5y*\sin(q4+q5)-(1/2)*dq2*dq3*m5*lc5x*lc5y*\cos(2*q5+q4)-(1/2)*dq2*dq3*m5*lc5z*lc5y*\sin(q4+q5)-(1/2)*dq2*dq3*m5*lc5z*lc5y*\sin(q4-q5)-(1/4)*dq2*dq3*m5*lc5y^2*\sin(-2*q5+q4)-(1/2)*dq2*dq3*m5*lc5x*lc5y*\cos(-2*q5+q4)+(1/2)*dq2*dq3*m5*lc5x*cos(q4-q5)+(1/4)*dq2*dq3*m5*lc5y^2*\sin(2*q5+q4)+(1/2)*dq2*dq3*m5*lc5z*lc5x*\cos(q4+q5)-(1/2)*dq2*dq3*m5*lc5z*lc5y*\sin(q4+q5)+dq5*dq4*Ixy_5*\cos(2*q5)+dq5*dq4*Ixx_5*\sin(2*q5)-(1/4)*dq5*dq1*Izy_5*\sin(q2+q4-q5)-(1/4)*dq5*dq1*Izx_5*\cos(q2+q4-q5)+(1/4)*dq5*dq1*Iyy_5
\end{aligned}$$

```

* sin(q2+q4+q5)-(1/2)*dq2*dq1*Ixy_5*cos(q2+q4)+(1/4)*dq2*dq1*Iyz_5*sin(q2
+q4+q5)-(1/4)*dq2*dq1*Ixz_5*cos(q2+q4+q5)+(1/4)*dq2*dq1*Ixz_5*cos(q2+q4-
q5)+(1/4)*dq2*dq1*Iyz_5*sin(q2+q4-q5)+(1/2)*dq2*dq1*Iyx_4*cos(q2+q4)+(1/
2)*dq2*dq1*Iyz_4*sin(q2+q4)+(1/2)*dq2*dq1*Iyx_5*cos(q2+q4)-(1/2)*dq2*dq1*
cos(q2+q4)*Ixy_4-(1/2)*dq1^2*Ixx_4*sin(2*q2+2*q4)-(1/2)*dq1*dq3*m5*1c5x^2
*sin(2*q4+q2)-dq1*dq3*m4*1c4x^2*sin(2*q4+q2)+(1/2)*dq1*dq3*m5*q3*d5*sin
(q2+q4)+dq1*dq3*m5*1c5x*d5*cos(2*q4-q5+q2)+(1/4)*dq1*dq3*m5*1c5y^2*sin(-
2*q5+2*q4+q2)+dq5^2*Ixz_5*cos(q5)-(1/2)*dq2*dq3*m5*d5*1c5y*sin(q4-q5)-
(1/4)*dq2*dq3*m5*1c5x^2*sin(2*q5+q4)+(1/4)*dq2*dq3*m5*1c5x^2*sin(-2*q5+
q4)+dq3*dq5*m5*1c5y^2*sin(q4)+(1/4)*dq1^2*m5*1c5x^2*sin(2*q2+2*q4)+(1/8)*
dq1^2*m5*1c5x^2*sin(2*q5+2*q2+2*q4)-(1/2)*dq1^2*m5*d5^2*sin(2*q2+2*q4)-
(1/4)*dq1^2*m5*1c5y^2*sin(2*q2+2*q4)-(1/2)*dq1*dq4*cos(q2+q4)*Ixy_4-(1/
2)*dq1^2*m4*1c4z^2*sin(2*q2+2*q4)+(1/2)*dq5*dq1*m5*1c5y^2*sin(2*q5+q2+q4)
-(1/2)*dq5*dq1*m5*1c5x^2*sin(2*q5+q2+q4)-(1/2)*dq5*dq1*m5*1c5x^2*sin(-
2*q5+q2+q4)+(1/2)*dq5*dq1*m5*1c5y^2*sin(-2*q5+q2+q4)+dq5*dq1*m5*1c5y*1c5x
*cos(-2*q5+q2+q4)-dq5*dq1*m5*1c5y*1c5x*cos(2*q5+q2+q4)-dq5*dq1*m5*1c5x^2*
sin(q2+q4)-dq5*dq1*m5*1c5y^2*sin(q2+q4)+dq5*dq1*m5*d5*1c5y*sin(q2+q4-q5)-
dq5*dq1*m5*d5*1c5y*sin(q2+q4+q5)+dq5*dq1*m5*1c5x*cos(q2+q4-q5)+dq5*dq1*m5*
1c5z*1c5x*cos(q2+q4+q5)-(1/4)*dq5*dq1*Izx_5*cos(q2+q4+q5)-(1/2)*dq2*dq1*
sin(q2+q4)*Izy_4-(1/4)*dq2*dq1*Izx_5*cos(q2+q4-q5)-(1/4)*dq2*dq1*Izy_5*
sin(q2+q4-q5)-(1/4)*dq2*dq1*Izy_5*sin(q2+q4+q5)+(1/4)*dq2*dq1*Izx_5*cos(
q2+q4+q5)-(1/2)*dq1*dq4*Ixy_5*cos(q2+q4)-(1/2)*dq1*dq4*sin(q2+q4)*Izy_4+
(1/4)*dq1*dq4*Iyz_5*sin(q2+q4+q5)-(1/4)*dq1*dq4*Ixz_5*cos(q2+q4+q5)+(1/4)*
dq1*dq4*Ixz_5*cos(q2+q4-q5)+(1/4)*dq1*dq4*Iyz_5*sin(q2+q4-q5)+(1/2)*dq1*
dq4*Iyx_4*cos(q2+q4)+(1/2)*dq1*dq4*Iyz_4*sin(q2+q4)+(1/2)*dq1*dq4*Iyx_5*c
os(q2+q4)+dq5*dq1*m5*1c5z*1c5x*cos(q2+q4-q5)-dq5*dq1*m5*1c5z*1c5y*sin(q2+
q4+q5)+dq2*dq5*m5*1c5y^2*sin(2*q5)-2*dq2*dq5*m5*1c5x*1c5y*cos(2*q5)-dq2*
dq5*m5*1c5x^2*sin(2*q5)+(1/4)*dq1*dq3*m5*1c5y*sin(q2+q4-q5)-(1/4)*dq1*
dq3*m5*1c5z*1c5x*cos(q4-q2+q5)+dq1*dq3*m5*1c5y*1c5z*sin(2*q4-q5+q2)-(1/2)*
dq1*dq3*m5*1c5y*1c5x*cos(2*q5+2*q4+q2)-dq1*dq3*m5*1c5y*d5*sin(2*q4+q5+q2)
-(1/2)*dq3^2*m5*1c5z*1c5x*cos(q5+2*q4)-(1/2)*dq3^2*m5*d5*1c5x*cos(2*q4-
q5)-(1/2)*dq3^2*m5*1c5z*1c5x*cos(2*q4-q5)+(1/2)*dq3^2*m5*1c5y*1c5z*sin(q5
+2*q4)-(1/2)*dq3^2*m5*d5*1c5y*sin(2*q4-q5)-(1/2)*dq3^2*m5*d5*1c5x*cos(q5
+2*q4)+(1/2)*dq3^2*m5*d5*1c5y*sin(q5+2*q4)-dq3^2*m4*1c4x*1c4z*cos(2*q4)-
(1/4)*dq3^2*m5*1c5y*1c5x*cos(-2*q5+2*q4)+(1/4)*dq3^2*m5*1c5y*1c5x*cos(2*
q5+2*q4)-(1/2)*dq3^2*m5*1c5y*1c5z*sin(2*q4-q5)-dq3^2*m5*1c5z*d5*sin(2*q4)
;

```

```

V5=dq1*dq4*m5*1c5y*1c5x*cos(2*q5+q2+q4)+dq1*dq4*m5*1c5y^2*sin(q2+q4)+dq1*
dq4*m5*1c5x^2*sin(q2+q4)-dq1*dq4*m5*d5*1c5x*cos(q2+q4+q5)-dq1*dq4*m5*1c5z
*1c5y*sin(q2+q4-q5)-dq1*dq4*m5*1c5z*1c5x*cos(q2+q4+q5)-dq1*dq4*m5*1c5z*
1c5x*cos(q2+q4-q5)-(1/2)*dq1*dq4*m5*1c5y^2*sin(2*q5+q2+q4)+(1/2)*dq1*dq4*
Iyy_5*sin(2*q5+q2+q4)-(1/2)*dq1*dq4*Iyx_5*cos(2*q5+q2+q4)-(1/2)*dq2^2*m5*
q3*1c5y*sin(q4+q5)-(1/2)*dq2^2*m5*q3*1c5x*cos(q4-q5)+(1/2)*dq2^2*m5*q3*
1c5x*cos(q4+q5)+dq1*dq4*m5*1c5z*1c5y*sin(q2+q4+q5)+(1/2)*dq1*dq4*m5*1c5x^
2*sin(2*q5+q2+q4)+(1/2)*dq1*dq4*m5*1c5x^2*sin(-2*q5+q2+q4)-(1/2)*dq1*dq4*
m5*1c5y^2*sin(-2*q5+q2+q4)+dq1*dq4*m5*d5*1c5y*sin(q2+q4+q5)-dq1*dq4*m5*d5
*1c5x*cos(q2+q4-q5)-dq1*dq4*m5*d5*1c5y*sin(q2+q4-q5)-dq1*dq4*m5*1c5y*1c5x
*cos(-2*q5+q2+q4)-(1/2)*dq2*dq5*Izy_5*sin(q5)-(1/2)*dq2*dq5*Ixz_5*cos(q5)-
(1/2)*dq2*dq5*Iyz_5*sin(q5)+(1/2)*dq2*dq5*Izx_5*cos(q5)+(1/2)*dq2^2*m5*1
c5x^2*sin(2*q5)+(1/2)*dq4*dq5*Izx_5*cos(q5)-(1/2)*dq4*dq5*Izy_5*sin(q5)-
(1/2)*dq4*dq5*Ixz_5*cos(q5)+(1/2)*dq4*dq5*Iyz_5*sin(q5)+(1/2)*dq1*dq2*Iyy
_5*sin(2*q5+q2+q4)-(1/2)*dq4^2*m5*1c5y^2*sin(2*q5)-(1/2)*dq2^2*m5*1c5y^2*

```

$$\begin{aligned}
& \sin(2*q5) - (1/2)*dq1*dq2*Ixy_5*\cos(2*q5+q2+q4) - (1/2)*dq1*dq2*Ixx_5*\sin(2*q5+q2+q4) + \\
& + dq1*dq2*sin(q2+q4)*Izz_5 - (1/2)*dq1*dq2*Ixx_5*\sin(-2*q5+q2+q4) + \\
& + (1/2)*dq1*dq2*Iyy_5*\sin(-2*q5+q2+q4) + (1/2)*dq1*dq2*Ixy_5*\cos(-2*q5+q2+q4) + \\
& + (1/2)*dq4^2*m5*lc5x^2*sin(2*q5) + dq2^2*m5*lc5x*lc5y*cos(2*q5) - (1/2)*dq4^2 \\
& *Iyx_5*\cos(2*q5) - dq3*dq4*m5*lc5y^2*sin(q4) - (1/2)*dq1*dq2*m5*lc5y^2*sin(2*q5+q2+q4) - \\
& - (1/2)*dq2*dq3*m5*lc5y*cos(q4-q5) - (1/2)*dq2*dq3*m5*lc5y*cos(q4+q5) + \\
& + (1/2)*dq2*dq3*m5*lc5x*sin(q4-q5) - (1/2)*dq2*dq3*m5*lc5x*sin(q4+q5) + \\
& + (1/8)*dq1^2*Ixz_5*\cos(2*q2+2*q4+q5) - (1/8)*dq1^2*Izy_5*\sin(2*q2+2*q4+q5) - \\
& - (1/8)*dq1^2*Ixz_5*\cos(2*q2+2*q4-q5) - (1/8)*dq1^2*Ixx_5*\sin(2*q5+2*q2+2*q4) + \\
& + (1/8)*dq1^2*Iyy_5*\sin(2*q5+2*q2+2*q4) - (1/8)*dq1^2*Iyz_5*\sin(2*q2+2*q4-q5) - \\
& - (1/8)*dq1^2*Ixy_5*\cos(2*q5+2*q2+2*q4) - (1/4)*dq1^2*m5*q3*lc5y*sin(q4-q5) - \\
& - dq3*dq2*m5*q3*lc5y*sin(q5) + dq3*dq2*m5*q3*lc5x*cos(q5) - dq3*dq4*m5* \\
& lc5x^2*sin(q4) + (1/2)*dq1*dq2*m5*lc5x^2*sin(2*q5+q2+q4) + (1/2)*dq1*dq2*m5* \\
& lc5x^2*sin(-2*q5+q2+q4) - dq1*dq2*m5*lc5z*lc5y*sin(q2+q4-q5) - dq1*dq2*m5* \\
& lc5z*lc5x*cos(q2+q4+q5) - dq1*dq2*m5*lc5z*lc5x*cos(q2+q4-q5) + dq1*dq2*m5* \\
& lc5z*lc5y*sin(q2+q4+q5) - dq1*dq2*m5*q3*lc5x*cos(-q2+q5) - (1/2)*dq1*dq2*m5* \\
& lc5y^2*sin(-2*q5+q2+q4) + dq1*dq2*m5*d5*lc5y*sin(q2+q4+q5) - dq1*dq2*m5* \\
& lc5x*cos(q2+q4-q5) + dq4^2*m5*lc5x*lc5y*cos(2*q5) + dq1*dq2*m5*lc5x^2*sin(q2+ \\
& q4) - dq1*dq2*m5*d5*lc5x*cos(q2+q4+q5) - dq1*dq2*m5*d5*lc5y*sin(q2+q4-q5) - \\
& dq1*dq2*m5*lc5y*lc5x*cos(-2*q5+q2+q4) + dq1*dq2*m5*lc5y*lc5x*cos(2*q5+q2+ \\
& q4) + dq1*dq2*m5*lc5y^2*sin(q2+q4) + dq1*dq2*m5*q3*lc5y*sin(q2+q5) - dq1*dq2* \\
& m5*q3*lc5x*cos(q2+q5) + dq1*dq2*m5*q3*lc5y*sin(-q2+q5) + (1/2)*dq1*dq2*Iyx_5* \\
& \cos(-2*q5+q2+q4) + (1/4)*dq1*dq3*m5*q3*lc5x*cos(q2+q4+q5) + (1/2)*dq1*dq3*m5* \\
& lc5y*lc5x*cos(2*q5-q2) - (1/2)*dq1*dq2*Iyx_5*\cos(2*q5+q2+q4) + (1/4)*dq1^2*m5* \\
& *lc5y^2*sin(2*q5) - (1/4)*dq1^2*m5*lc5x^2*sin(2*q5) + (1/4)*dq1*dq3*m5*q3* \\
& lc5y*sin(q4-q2+q5) - (1/2)*dq1*dq3*m5*lc5x*lc5z*cos(2*q4-q5+q2) + (1/2)*dq1* \\
& dq3*m5*lc5x*lc5z*cos(2*q4+q5+q2) + (1/4)*dq1*dq3*m5*q3*lc5x*cos(q4-q2-q5) + \\
& (1/2)*dq1*dq3*m5*lc5y*lc5x*cos(q2+2*q5) - (1/2)*dq1*dq3*m5*lc5y*lc5z*sin(2* \\
& q4+q5+q2) - (1/2)*dq1*dq3*m5*lc5y*lc5x*cos(-2*q5+2*q4+q2) - (1/2)*dq1*dq3*m5* \\
& lc5y*d5*sin(2*q4-q5+q2) - (1/2)*dq2^2*m5*q3*lc5y*sin(q4-q5) + (1/4)*dq1^2* \\
& Ixx_5*\sin(2*q5) + (1/4)*dq1^2*Ixy_5*\cos(2*q5) + (1/4)*dq1^2*Iyx_5*\cos(2*q5) - \\
& (1/4)*dq1^2*Iyy_5*\sin(2*q5) - (1/4)*dq1^2*m5*q3*lc5y*sin(q4+q5) - (1/4)* \\
& dq1^2*m5*q3*lc5x*cos(q4-q5) + (1/4)*dq1^2*m5*q3*lc5x*cos(q4+q5) + (1/8)* \\
& dq3^2*m5*lc5y^2*sin(-2*q5+2*q4) + (1/8)*dq3^2*m5*lc5x^2*sin(2*q5+2*q4) - (1/ \\
& 8)*dq3^2*m5*lc5y^2*sin(2*q5+2*q4) - (1/8)*dq3^2*m5*lc5x^2*sin(-2*q5+2*q4) - \\
& (1/8)*dq1^2*Iyx_5*\cos(2*q5+2*q2+2*q4) + (1/8)*dq1^2*Izx_5*\cos(2*q2+2*q4+q5) - \\
& - (1/8)*dq1^2*Iyx_5*\cos(-2*q5+2*q2+2*q4) - (1/8)*dq1^2*Izy_5*\sin(2*q2+2*q4- \\
& q5) - (1/8)*dq1^2*Ixy_5*\cos(-2*q5+2*q2+2*q4) - (1/8)*dq1^2*Iyy_5*\sin(- \\
& 2*q5+2*q2+2*q4) + (1/8)*dq1^2*Ixx_5*\sin(-2*q5+2*q2+2*q4) - (1/8)*dq1^2*Iyz_5* \\
& \sin(2*q2+2*q4+q5) - (1/8)*dq1^2*Izx_5*\cos(2*q2+2*q4-q5) + (1/4)*dq1^2*m5* \\
& lc5x*lc5y*cos(-2*q5+2*q2+2*q4) + (1/4)*dq1^2*m5*lc5x*lc5z*cos(2*q2+2*q4-q5) + \\
& + (1/4)*dq1^2*m5*lc5y*d5*sin(2*q2+2*q4+q5) + (1/4)*dq1^2*m5*lc5x*lc5y*cos(2* \\
& q5+2*q2+2*q4) + (1/4)*dq1^2*m5*lc5y*lc5z*sin(2*q2+2*q4+q5) - (1/4)*dq1^2*m5* \\
& lc5x*lc5z*cos(2*q2+2*q4+q5) - (1/4)*dq1^2*m5*lc5x*lc5y*cos(2*q2+q5+q4) + (1/4)* \\
& dq1^2*m5*lc5x*lc5y*cos(2*q2-q5+q4) + (1/4)*dq1^2*m5*lc5y*lc5z*sin(2*q2+q5+q4) + \\
& (1/4)*dq1^2*m5*lc5y*lc5z*sin(2*q2-q5+q4) + (1/4)*dq1^2*m5*lc5y*d5*sin(2*q2+2* \\
& q4-q5) + (1/4)*dq1^2*m5*lc5y*lc5z*sin(2*q2+2*q4-q5) + (1/4)*dq1^2*m5*lc5x*d5* \\
& cos(2*q2+2*q4-q5) + (1/4)*dq5*dq1*Iyz_5*\sin(q2+q4+q5) - (1/4)*dq5*dq1*Ixz_5* \\
& \cos(q2+q4+q5) + (1/4)*dq5*dq1*Ixz_5*\cos(q2+q4-q5) + (1/4)*dq5*dq1*Iyz_5*\sin( \\
& q2+q4-q5) - (1/8)*dq1^2*m5*lc5y^2*sin(2*q5+2*q2+2*q4) - (1/8)*dq1^2*m5* \\
& lc5x^2*sin(-2*q5+2*q2+2*q4) + (1/8)*dq1^2*m5*lc5y^2*sin(-2*q5+2*q2+2*q4) + \\
& (3/4)*dq1*dq4*Izx_5*\cos(q2+q4-q5) + (3/4)*dq1*dq4*Izy_5*\sin(q2+q4-q5) - \\
& (3/4)*dq1*dq4*Izy_5*\sin(q2+q4+q5) + (3/4)*dq1*dq4*Izx_5*\cos(q2+q4+q5) - \\
& (1/4)*dq1^2*m5*lc5x*d5*cos(2*q2+2*q4+q5) + (1/2)*dq1*dq3*m5*lc5x*sin(-q2 \\
& +q5) + (1/2)*dq1*dq3*m5*lc5y*cos(-q2+q5) - (1/2)*dq1*dq3*m5*lc5x*sin(q2+q5) - \\
& (1/2)*dq1*dq3*m5*lc5y*cos(q2+q5) - (1/4)*dq1*dq3*m5*lc5y^2*sin(q2+2*q5) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (1/2) * dq4 * dq3 * m5 * lc5x^2 * \sin(-2 * q5 + q4) + (1/2) * dq1 * dq3 * m5 * lc5x * d5 * \cos(2 * q4 + q5 + q2) - (1/4) * dq1 * dq3 * m5 * q3 * lc5x * \cos(q2 + q4 - q5) + (1/4) * dq1 * dq3 * m5 * q3 * lc5y * \sin(q4 - q2 - q5) - (1/4) * dq1 * dq3 * m5 * q3 * lc5y * \sin(q2 + q4 - q5) + (1/4) * dq1 * dq3 * m5 * lc5y * \sin(-2 * q5 + 2 * q4 + q2) + (1/4) * dq1 * dq3 * m5 * lc5y * \sin(2 * q5 + 2 * q4 + q2) - (1/4) * dq1 * dq3 * m5 * lc5x * \sin(2 * q5 + 2 * q4 + q2) + (1/4) * dq1 * dq3 * m5 * lc5x * \sin(2 * q5 + 2 * q4 + q2) + (1/4) * dq1 * dq3 * m5 * lc5y * \sin(2 * q5 + 2 * q4 + q2) - (1/4) * dq1 * dq3 * m5 * lc5y * \sin(2 * q5 + 2 * q4 + q2) - (1/2) * dq2 * dq3 * m5 * lc5y * \sin(q4 + q5) - dq2 * dq3 * m5 * lc5y * \cos(2 * q5 + q4) - (1/2) * dq2 * dq3 * m5 * lc5z * lc5y * \sin(q4 + q5) + (1/2) * dq2 * dq3 * m5 * lc5z * lc5y * \sin(q4 - q5) + (1/2) * dq2 * dq3 * m5 * lc5y * \sin(-2 * q5 + q4) + (1/2) * dq2 * dq3 * m5 * lc5x * \cos(q4 + q5) + (1/2) * dq2 * dq3 * m5 * lc5x * \cos(q4 - q5) + (1/2) * dq2 * dq3 * m5 * lc5y * \sin(2 * q5 + q4) + (1/2) * dq2 * dq3 * m5 * lc5z * lc5x * \cos(q4 + q5) + (1/2) * dq2 * dq3 * m5 * lc5z * lc5x * \cos(q4 - q5) - (1/2) * dq1 * dq3 * m5 * lc5x * lc5y * \cos(2 * q5) + (1/4) * dq3 * m5 * lc5y * \sin(2 * q5) - (1/4) * dq5 * dq1 * Izy_5 * \sin(q2 + q4 - q5) - (1/4) * dq5 * dq1 * Izx_5 * \cos(q2 + q4 - q5) - (1/4) * dq5 * dq1 * Izy_5 * \sin(q2 + q4 + q5) - (1/4) * dq2 * dq1 * Izx_5 * \sin(q2 + q4 + q5) + (1/4) * dq2 * dq1 * Izx_5 * \cos(q2 + q4 + q5) + (1/4) * dq2 * dq1 * Izx_5 * \cos(q2 + q4 - q5) + (1/4) * dq2 * dq1 * Iyz_5 * \sin(q2 + q4 - q5) - (1/2) * dq1 * dq3 * m5 * lc5x * d5 * \cos(2 * q4 - q5 + q2) - (1/4) * dq1 * dq3 * m5 * lc5y * \sin(-2 * q5 + 2 * q4 + q2) + (1/4) * dq1 * dq3 * m5 * lc5y * \sin(2 * q5 - q2) * lc5x^2 + dq4 * dq2 * Iyy_5 * \sin(2 * q5) - dq4 * dq2 * Iyx_5 * \cos(2 * q5) - dq4 * dq2 * Ixx_5 * \sin(2 * q5) - (1/2) * dq1 * dq4 * Izx_5 * \sin(2 * q5 + q2 + q4) + dq1 * dq4 * \sin(q2 + q4) * Izx_5 - (1/2) * dq1 * dq4 * Izx_5 * \sin(-2 * q5 + q2 + q4) + (1/2) * dq2 * dq3 * m5 * lc5y * \sin(q4 - q5) - (1/2) * dq2 * dq3 * m5 * lc5x * \sin(2 * q5 + q4) - (1/2) * dq2 * dq3 * m5 * lc5x * \sin(-2 * q5 + q4) + (1/8) * dq1 * dq3 * m5 * lc5x * \sin(2 * q5 + 2 * q2 + 2 * q4) + (1/4) * dq5 * dq1 * Izx_5 * \cos(q2 + q4 + q5) - (1/2) * dq3 * m5 * lc5x * lc5y * \cos(2 * q5) - dq4 * dq2 * m5 * lc5y * \sin(2 * q5) + 2 * dq4 * dq2 * m5 * lc5x * lc5y * \cos(2 * q5) + dq4 * dq2 * m5 * lc5x * \sin(2 * q5) + (1/2) * dq1 * dq4 * Iyy_5 * \sin(-2 * q5 + q2 + q4) + (1/2) * dq1 * dq4 * Izx_5 * \cos(-2 * q5 + q2 + q4) + (1/2) * dq1 * dq4 * Izx_5 * \cos(-2 * q5 + q2 + q4) + (1/2) * dq2 * Iyy_5 * \sin(2 * q5) - dq4 * dq3 * m5 * d5 * lc5y * \sin(q4 + q5) - dq4 * dq3 * m5 * lc5x * lc5y * \cos(2 * q5 + q4) - dq4 * dq3 * m5 * lc5z * lc5y * \sin(q4 + q5) + dq4 * dq3 * m5 * lc5z * lc5y * \sin(q4 - q5) + (1/2) * dq4 * dq3 * m5 * lc5y * \sin(2 * q5 + q4) - (1/2) * dq4 * dq3 * m5 * lc5x * \cos(q4 - q5) + (1/2) * dq4 * dq3 * m5 * lc5y * \sin(2 * q5 + q4) + dq4 * dq3 * m5 * d5 * lc5x * \cos(q4 - q5) + (1/2) * dq4 * dq3 * m5 * lc5y * \sin(2 * q5 + q4) + dq4 * dq3 * m5 * lc5z * lc5x * \cos(q4 - q5) + dq4 * dq3 * m5 * lc5y * \sin(q4 - q5) - (1/2) * dq4 * dq3 * m5 * lc5x * \sin(2 * q5 + q4) + (3/4) * dq2 * dq1 * Izx_5 * \cos(q2 + q4 - q5) + (3/4) * dq2 * dq1 * Izy_5 * \sin(q2 + q4 - q5) - (3/4) * dq2 * dq1 * Izy_5 * \sin(q2 + q4 + q5) + (3/4) * dq2 * dq1 * Izx_5 * \cos(q2 + q4 + q5) - (1/4) * dq1 * dq4 * Iyz_5 * \sin(q2 + q4 + q5) + (1/4) * dq1 * dq4 * Izx_5 * \cos(q2 + q4 + q5) + (1/4) * dq1 * dq4 * Izx_5 * \cos(q2 + q4 - q5) - (1/4) * dq1 * dq3 * m5 * q3 * lc5y * \sin(q2 + q4 - q5) - (1/4) * dq1 * dq3 * m5 * q3 * lc5x * \cos(q4 - q2 + q5) - (1/2) * dq1 * dq3 * m5 * lc5y * \sin(2 * q4 - q5 + q2) - (1/2) * dq1 * dq3 * m5 * lc5y * \cos(2 * q5 + 2 * q4 + q2) - (1/2) * dq1 * dq3 * m5 * lc5y * \sin(2 * q4 + q5 + q2) - (1/4) * dq3 * m5 * lc5y * d5 * \sin(2 * q4 + q5 + q2) - (1/4) * dq3 * m5 * lc5z * lc5x * \cos(q5 + 2 * q4) + (1/4) * dq3 * m5 * lc5z * lc5x * \cos(2 * q4 - q5) + (1/4) * dq3 * m5 * lc5y * \sin(q5 + 2 * q4) + (1/4) * dq3 * m5 * lc5y * \sin(2 * q4 - q5) - (1/4) * dq3 * m5 * lc5x * \cos(q5 + 2 * q4) + (1/4) * dq3 * m5 * lc5x * \cos(2 * q5 + 2 * q4) + (1/4) * dq3 * m5 * lc5y * \sin(q5 + 2 * q4) + (1/4) * dq3 * m5 * lc5y * \cos(2 * q5 + 2 * q4) + (1/4) * dq3 * m5 * lc5z * lc5x * \sin(2 * q4 - q5) - (1/2) * dq2 * Iyy_5 * \cos(2 * q5) - (1/2) * dq2 * Izx_5 * \cos(2 * q5) - (1/2) * dq2 * Ixx_5 * \sin(2 * q5) + (1/2) * dq4 * Iyy_5 * \sin(2 * q5);
\end{aligned}$$

C=[V1;V2;V3;V4;V5];

## VECTOR DE PARES GRAVITACIONALES

```
function x=G(q)

%se mandan llamar los valores de las distancias de los centros de masa y
%de los valores iniciales para las operaciones de las matrices.

global d1 a4 d5 gc

%se mandan llamar los valores de las masas de los eslabones
global m1 m2 m3 m4 m5

%variables de los centros de masa

global lc1x lc1y lc1z lc2x lc2y lc2z
global lc3x lc3y lc3z lc4x lc4y lc4z
global lc5x lc5y lc5z

g1=gc;

q1=q(1);
q2=q(2);
q3=q(3);
q4=q(4);
q5=q(5);

%componentes del vector de gravedad

g_1= 0;

g_2=m2*g1*cos(q2)*lc2x+m2*g1*sin(q2)*lc2z+m3*g1*lc3x*cos(q2)-m3*g1*lc3y*
sin(q2)+m3*g1*q3*sin(q2)+m4*g1*lc4x*cos(q2+q4)+m4*g1*lc4z*sin(q2+q4)+m4*g
1*q3*sin(q2)+(1/2)*m5*g1*lc5x*cos(q2+q4+q5)+(1/2)*m5*g1*lc5x*cos(q2+q4-
q5)+(1/2)*m5*g1*lc5y*sin(q2+q4-q5)-(1/2)*m5*g1*lc5y*sin(q2+q4+q5)+m5*g1*
lc5z*sin(q2+q4)+m5*g1*d5*sin(q2+q4)+m5*g1*q3*sin(q2);

g_3=-m3*g1*cos(q2)-(1/2)*m4*g1*sin(q2)*(-cos(q1)*lc4x*sin(q1+q2+q4)-cos
(q1)*lc4x*sin(q1-q2-q4)-cos(q1)*lc4z*cos(q1-q2-q4)+cos(q1)*lc4z*cos(q1+q2
+q4)-cos(q1)*q3*cos(q1-q2)+cos(q1)*q3*cos(q1+q2)+sin(q1)*lc4x*cos(q1-q2-
q4)+sin(q1)*lc4x*cos(q1+q2+q4)+2*lc4y+sin(q1)*lc4z*sin(q1+q2+q4)-si(q1)*
lc4z*sin(q1-q2-q4)+sin(q1)*q3*sin(q1+q2)-sin(q1)*q3*sin(q1-q2))+(1/4)*m5*
g1*sin(q2)*(-2*cos(q1)*q3*cos(q1+q2)+2*cos(q1)*q3*cos(q1-q2)+2*sin(q1)*q3
```