



CENTRO DE INGENIERIA Y DESARROLLO INDUSTRIAL

RECONSTRUCCIÓN 3D, USANDO TRANSFORMADA WAVELET

Tesis

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE

*Maestra en Ciencia y Tecnología
en la Especialidad de Mecatrónica*

PRESENTA

L.M.A María Eugenia Quintanar Pérez

DIRIGIDA POR

Dr. Jesús Carlos Pedraza Ortega



Santiago de Querétaro, Qro., México, Diciembre del 2016.



CIENCIA Y TECNOLOGÍA

M. C. Emerenciano Salvador Lecona Uribe
Director Adjunto de Posgrado
PICYT – CIDESI
Querétaro

Los abajo firmantes, miembros del Comité Tutorial de la alumna **María Eugenia Quintanar Pérez**, una vez leída y revisada la Tesis titulada “**RECONSTRUCCIÓN 3D, USANDO TRANSFORMADA WAVELET**”, aceptamos que la referida tesis revisada y corregida sea presentada por la alumna para aspirar al grado de **Maestra en Ciencia y Tecnología** en la opción terminal de **Mecatrónica** durante el Examen de Grado correspondiente.

Y para que así conste firmamos la presente a los 15 días del mes de Diciembre del año dos mil dieciséis.


Dr. Jesús Carlos Pedraza Ortega

Tutor Académico



CIENCIA Y TECNOLOGÍA

M. C. Emerenciano Salvador Lecona Uribe
Director Adjunto de Posgrado
PICYT -CIDESI
Querétaro

Los abajo firmantes, miembros del Jurado del Examen de Grado de la alumna **María Eugenia Quintanar Pérez**, una vez leída y revisada la Tesis titulada **“RECONSTRUCCIÓN 3D, USANDO TRANSFORMADA WAVELET”**, aceptamos que la referida tesis revisada y corregida sea presentada por la alumna para aspirar al grado de **Maestra en Ciencia y Tecnología** en la opción terminal de **Mecatrónica** durante el Examen de Grado correspondiente.

Y para que así conste firmamos la presente a los 15 días del mes de Diciembre del año dos mil dieciséis.

Dr. Hugo Jiménez Hernández

Presidente

Dr. Leonardo Barriga Rodríguez

Secretario

Dr. Jesús Carlos Pedraza Ortega

Vocal

DEDICADO A:

Vicente Quintanar Quintanar.

Mi padre.

¡Cuán grande riqueza es, aún entre los pobres, el ser hijo de buen padre!

Juan Luis Vives

AGRADECIMIENTOS

Agradezco el apoyo del CIDESI y del CONACYT, por las facilidades que me otorgaron para la realización y culminación de este trabajo.

Hace mucho tiempo llegó una frase a mi vida y la marcaría:

“Nunca se está más oscuro que cuando va a amanecer”

Ha sido la frase que ha estado muchas veces conmigo, y que ha hecho que crea que siempre habrá tiempos mejores.

Existen muchas personas a mi alrededor que por pequeña que pueda verse su contribución a mi crecimiento quiero agradecer; y les agradezco de todo corazón que hayan estado cerca en los cambios que ha tenido mi vida, tanto en mi vida personal, como académica y laboral.

Un agradecimiento especial a mi familia, mis padres, hermanas y hermano, porque sin el apoyo que me han brindado, no hubiera podido llegar a donde me encuentro.

A Alfredo, mi esposo, porque se ha convertido en el motor de mi vida.

A todos mis amigos, que han sido un gran apoyo en momentos cruciales de mi vida.

A mis profesores que he tenido a lo largo de mi vida escolar, porque sin ellos no hubiera encontrado el camino.

En especial al Dr. Pedraza, por haber sido mi profesor y por haber aceptado ser mi director de tesis.

Y al Todopoderoso, porque me dio la oportunidad de vivir y de ser otra cosa.

“Las matemáticas poseen no sólo la verdad, sino cierta belleza suprema. Una belleza fría y austera, como la de una escultura.”

Bertrand Russell

“El experimentador que no sabe lo que está buscando no comprenderá lo que encuentra.”

Claude Bernard

CONTENIDO	Página
Resumen	vi
Lista de figuras	x
Lista de tablas	xii
Capítulo 1. Introducción	1
1.1. Definición del proyecto	2
1.2. Justificación	3
1.3. Hipótesis	6
1.4. Objetivos	6
1.5. Alcances y limitaciones	7
1.6. Organización de tesis	8
Capítulo 2. Transformadas	10
2.1. Transformada de Fourier	13
2.1.1. Propiedades	15
2.1.2. Transformada de Fourier en senos y en cosenos	16
2.2. Transformada Gabor	17
2.3. Transformada Wavelet	18
2.3.1. Funciones generadoras	21
Wavelet Haar	21
Wavelet Strömberg	22
Wavelet Meyer	23
Wavelet B-Spline	24
Wavelet Shannon	26
Wavelet Mexican Hat	27
Wavelet Morlet	27
2.3.2. Propiedades de la Transformada Wavelet Continua	28
2.3.3. Transformada Inversa de la Wavelet Continua	29

	Página
Capítulo 3. Perfilometría Wavelet	31
3.1. Perfilometría Wavelet	34
3.1.1. Desarrollo Directo de la Fase	35
3.2. Metodología propuesta	36
3.2.1. Adquisición de la imagen	37
3.2.2. Selección de una imagen	38
Metodología aplicada a un objeto Virtual	38
Frecuencia espacial	38
Proyección de franjas.....	39
Metodología aplicada a un objeto Real	39
Franjas proyectadas	39
Frecuencia espacial	41
3.2.3. Aplicar la transformada Wavelet Morlet	44
3.2.4. Desdoblar la fase (phase unwrapping)	47
3.2.5. Reconstruir el objeto	47
Capítulo 4. Pruebas y resultados	48
4.1 Prueba con Objeto Virtual (Creado por computadora)	49
4.2 Prueba con Objeto Real	61
Capítulo 5. Conclusiones y trabajo a futuro	64
5.1 Conclusiones	65
5.2 Trabajo a futuro	66
Referencias	67
Anexos.....	70

RESUMEN

Conforme pasa el tiempo, y también los avances tecnológicos, principalmente los informáticos, la ingeniería es una parte importante de la ciencia que ha coincidido con otras áreas del conocimiento con las cuales puede generar una sinergia para ayudar a que la calidad de vida de los individuos mejore notablemente, aunque en el presente trabajo no haya una aplicación directa en un problema real, si sienta las bases para la reconstrucción 3D de un objeto, para una posible aplicación posterior.

Este trabajo propone una técnica para reconstruir imágenes en 3D, utilizando transformada Wavelet unidimensional, tres de ellas principalmente, la Morlet, la Shannon y la B-Spline, se mostrarán resultados gráficos de cada una de ellas con dos tipos de objetos, virtuales y reales.

Se plantea la hipótesis de que puede desarrollar un algoritmo usando Transformada Wavelet 1D para obtener la información 3D en el procesamiento de imágenes, y que considere la etapa de desdoblamiento de fase.

Se hace una breve descripción de las transformaciones comenzando con la Transformada de Fourier y llegando hasta la Transformada Wavelet, herramientas matemáticas que han sentado las bases para la reconstrucción de objetos y que de esta última nos serviremos para hacer las reconstrucciones respectivas. En el trabajo se propone usar alguna de las Transformadas Wavelets, la Morlet, la Shannon y la B-Spline, por ser transformadas complejas continuas y se delimitarán a hacer uso de ellas de manera unidimensional.

La finalidad de la técnica es proyectar patrones de franjas, las cuales como se verá en el trabajo llevan una relación entre una buena reconstrucción y proyectarle franjas al objeto

que sean una potencia de dos. Para después calcular la frecuencia espacial f_0 y poder conocer la altura que tiene el objeto y poder realizar la reconstrucción.

Finalmente se hacen pruebas con algunos objetos virtuales y reales, para hacer un comparativo entre ellas y verificar la confiabilidad de la Transformada Wavelet con respecto de la Transformada de Fourier, y poder concluir que se pueden reconstruir imágenes en 3D usando una herramienta no tan explorada y que puede sentar las bases para investigaciones posteriores utilizando por ejemplo la Transformada Wavelet bidimensional o tridimensional.

ABSTRACT

As time passes, and technological advances, primarily computer development, the engineering is an important part of science that has coincided with other areas of knowledge which can generate a synergy and helps improve significantly the life quality of individuals; although in this study no direct application to a real problem is considered, the basics of 3D object reconstruction is studied for further applications.

This research proposes a technique to perform the 3D object reconstruction using one-dimensional wavelet transform, where three different wavelets are considered; Morlet, Shannon and B-Spline, also, graphical results are displayed using virtual and real objects.

It is hypothesized that an algorithm can be developed using 1D Wavelet Transform for 3D information in image processing, and using the phase unwrapping stage.

A brief description of the Fourier Transform and Wavelet Transform is presented, mathematical tools that have laid the fundamentals of the object reconstruction, and those tools are used to make the 3D models. The research proposes to use some of the Wavelet Transform, the Morlet, the Shannon and the B-Spline, being a continuous complex transformed and delimited to make use of it so dimensional.

The purpose of the technique is to project fringe patterns, which as discussed in the work establish a relationship between a good reconstruction and projected fringes to be a power of two. Then, the spatial frequency f_0 is estimated because this frequency has a direct relationship with the object's height.

Finally the tests with some real and virtual objects are performed to make a comparison between them, and verify the reliability of the wavelet transform with respect to the Fourier transform, and to conclude that images can be reconstructed in 3D using the proposed methodology. This research provides the basis for further work using the wavelet transform such as bidimensional or tridimensional Wavelet Profilometry.

Lista de figuras	Pág.
Figura 2.1. Diagrama de una transformada	12
Figura 2.2. Diagrama del procesamiento de imágenes usando transformadas	12
Figura 2.3. Gráfica de la Wavelet Haar	21
Figura 2.4. Gráfica de la Wavelet Lemaríe–Meyer	24
Figura 2.5. Gráfica de la Wavelet B–Spline Compleja	25
Figura 2.6. Gráfica de la Wavelet Shannon Compleja	26
Figura 2.7. Gráfica de la Wavelet Mexican Hat	27
Figura 2.8. Gráfica de la Wavelet Morlet	28
Figura 3.1. Diagrama de la relación entre señal y sistema	33
Figura 3.2. Diagrama de uso de la TWC–1D	36
Figura 3.3. Diagrama de flujo de la metodología propuesta	37
Figura 3.4. Diagrama de flujo para calcular el número de franjas	40
Figura 3.5. Diagrama de flujo para obtener la frecuencia espacial	42
Figura 3.6. Imagen con franjas proyectadas	43
Figura 3.7. Comportamiento del renglón i , de la imagen con franjas proyectadas ..	44
Figura 4.1. Relación f_0 y el número de franjas proyectadas	50
Figura 4.2. Objeto 3D creado virtualmente	50
Figura 4.3. Objeto creado virtualmente.....	52
Figura 4.4. Imagen virtual con franjas proyectadas	52
Figura 4.5. Mapa de fase de la imagen con las franjas proyectadas	53
Figura 4.6. Imagen reconstruida en 3D	54
Figura 4.7. Diferencia entre la imagen original y la reconstruida	54
Figura 4.8. Resultado del desenvolvimiento de fase	55
Figura 4.9. Reconstrucción del objeto, con el algoritmo desdoblamiento de fase de flujo máximo/ruta mínima	55
Figura 4.10. Objeto a reconstruir en 3D	56
Figura 4.11. Objeto con franjas	56
Figura 4.12. Mapa de fase	57
Figura 4.13. Imagen reconstruida	57

Lista de figuras	Pág.
Figura 4.14. Diferencia entre la imagen original y la reconstruida	58
Figura 4.15. Resultado del desenvolvimiento de fase	58
Figura 4.16. Reconstrucción del objeto, con el algoritmo desdoblamiento de fase de flujo máximo/ruta mínima	59
Figura 4.17. Diagrama del experimento	61
Figura 4.18. Imagen con franjas proyectadas	62
Figura 4.19. Objeto reconstruido	62

Lista de tablas	Pág.
Tabla 4.1. Pruebas con objetos creados por computadora.....	60
Tabla 4.2. Pruebas con objetos con franjas	63

Capítulo 1

Introducción

Introducción

1.1. Definición del proyecto

A donde quiera que miremos hay señales que podemos analizar: tremores sísmicos, el discurso humano, vibraciones de máquinas, imágenes médicas, datos financieros, música, fotografías de objetos y muchos otros tipos de señales.

Estudiar estas señales no es una tarea sencilla, sobretodo porque éstas tienen ruido o perturbaciones que hace que, al analizarlas, la información que se obtiene de ellas no sea la que se espera para el tratamiento y procesamiento de señales. El ruido está inherente en el medio y por lo tanto una de las tareas en el procesamiento de señales es disminuir su efecto en la información que se analiza.

Hoy en día, el procesamiento de señales representa una herramienta utilizada en una amplia variedad de aplicaciones, tales como sistemas de comunicación, sistemas de control, procesamiento de sonido, de voz, de imágenes, de video, entre otras.

Dentro de estas aplicaciones, los procesadores de señales representan un elemento esencial en el funcionamiento de diversos dispositivos como por ejemplo los teléfonos celulares, las cámaras digitales, los televisores de alta definición. Estos dispositivos tienen como medio de presentación de sus aplicaciones a las imágenes, algunas de ellas serían muy útiles si se visualizaran tridimensionalmente.

Hay diversas técnicas que se utilizan para el tratamiento o procesamiento de imágenes, entre ellas está la de aplicar la Transformada de Fourier, que es una técnica ampliamente conocida para estos fines. Esta transformada es muy útil para señales estacionarias, pero no lo es tanto para el análisis de señales transitorias, es por ello que se propone analizar señales, en particular imágenes tridimensionales, con otra herramienta, la Transformada Wavelet.

La Transformada Wavelet, es una transformada que tiene como ventaja que se adecua a señales no estacionarias. Algunas aplicaciones de la Transformada Wavelet son el análisis de señales electrocardiográficas, sísmicas, de sonido, de radar, compresión y procesamiento de imágenes y reconocimiento de patrones.

Es por ello que en este trabajo se presenta una metodología para la reconstrucción tridimensional de objetos que tienen un patrón de franjas proyectado, mediante el tratamiento digital de imágenes, usando Transformada Wavelet.

1.2. Justificación

Para el procesamiento de imágenes e inferencia de información tridimensional, hay dos tipos de métodos: los pasivos y los activos, llamados también de no contacto y de contacto respectivamente.

Los métodos pasivos hacen la reconstrucción tridimensional de un objeto a partir de imágenes tomadas desde diferentes puntos de vista del objeto a reconstruir; dentro de las técnicas de este método están:

- proyección por foco,
- profundidad de foco, y
- visión estéreo.

Los métodos activos se basan en el principio de triangulación, es decir, proyectan energía en la escena y detectan la energía reflejada; entre las técnicas más usadas se encuentran:

- los radares,
- la proyección de franjas,
- la luz estructurada, o a través de láser, triangulación,
- métodos de proyección de luz 2D,
- métodos de proyección de franjas.

Dentro de los métodos de proyección de luz 2D se encuentran los relativos a la interferometría. Mientras que, dentro de los métodos de proyección de franjas, también llamados skeleton, se encuentran las técnicas que usan la Transformada de Fourier, que son las técnicas de proyección de luz estructurada.

Las técnicas más usadas son las relativas a la Transformada de Fourier, debido a que usualmente se representa una señal mediante una función que depende del tiempo o de la frecuencia. El que una señal se represente por su Transformada de Fourier tiene sus ventajas, entre ellas, está que sus resultados son satisfactorios para funciones periódicas y que sean suficientemente regulares, su duración en el tiempo es infinita y detecta frecuencias que han sido determinadas previamente.

Pero este método también tiene sus desventajas, entre ellas se encuentra que los resultados no son muy satisfactorios para señales no estacionarias, los resultados se dan en el dominio del tiempo o en el dominio de la frecuencia, pero no en ambos y sobre todo no se obtiene información de la evolución en el tiempo del espectro de fase.

Previendo este último detalle acerca de la Transformada de Fourier para el procesamiento de imágenes, se introdujeron modificaciones a ésta; tal es el caso de la Transformada de Fourier con Ventana Deslizante, que la propuso Gabor en 1940; esta modificación no es otra cosa que la Transformada de Fourier en un corto periodo de tiempo, la ventaja que se obtuvo de esta transformada fue que puede localizar una singularidad que exista en la señal, mientras que una desventaja es que sólo se conoce el intervalo donde se produce ésta y no va más allá, además que no se distinguen los diferentes comportamientos que puede haber dentro de una misma ventana.

Conforme fue pasando el tiempo se fueron desarrollando nuevas técnicas para el procesamiento de señales, de tal manera que se transforma una señal de su base temporal a una base en las frecuencias, tal técnica se basa en onduletas (Wavelets), estas nuevas onduletas o wavelets simulan la Transformada de Fourier con Ventana Deslizante con la ventaja adicional que pueden dilatarse o contraerse, y trasladarse a partir de una onda finita, llamada Wavelet madre, además que es capaz

de concentrarse en fenómenos transitorios y de alta frecuencia con un mejor resultado que la Transformada de Gabor.

Dentro de las ventajas de esta técnica se encuentran:

- La señal se mapea en una representación de tiempo–escala;
- Se tiene un tamaño de ventana adaptado a las frecuencias, es decir, no es necesario aplicar a toda la señal el mismo tamaño de la ventana, sino que puede adaptarse dependiendo de las frecuencias de la señal;
- La función y su transformada se encuentran en un intervalo finito y, por lo tanto, no hay pérdida de información al aplicar la Transformada Wavelet Inversa;
- El espectro temporal de las señales se conserva y provee un análisis de multiresolución con ventanas dilatadas.

Como la Transformada Wavelet tiene la habilidad de analizar a la señal por frecuencias, el análisis de las frecuencias de mayor rango se realiza usando ventanas angostas, mientras que el de las frecuencias de menor rango se hace usando ventanas anchas.

La metodología que se presenta en este trabajo, se sustenta en aplicar la Transformada Wavelet como una opción en la reconstrucción 3D de un objeto, y tendrá como medio el calcular la fase del mismo. De este proceso, se ha llevado a cabo un estudio previo acerca de lo que se ha hecho con anterioridad para este problema:

Entre ellos se encuentran Jingang Zhong y Jiawen Weng, que en el 2004 introducen la Wavelet Gabor para el desdoblamiento de fase, posteriormente Chenggen Quan, Cho Jui Tay, y Lujie Chen en 2005 estiman la densidad de franjas con la transformada Wavelet Continua y además introducen la Wavelet Morlet.

En el 2006, L.R. Watkins, trabaja con las características de la transformada Wavelet Continua, y en ese mismo año Munther A. Gdeisat, David R. Burton, y Michael J. Lalor, proponen una nueva técnica para el desdoblamiento de fase usando la Transformada Wavelet Continua en 2D, trabajan

con la Wavelet Morlet Compleja y en el 2008 se introduce la Wavelet Haar para el tratamiento de imágenes con franjas proyectadas por Xiang Zhou y Hong Zhao.

En la búsqueda bibliográfica que se realizó, se observó que las wavelets madres con las que se ha trabajado requieren parámetros de escalamiento y de traslación; pero no se ha encontrado el parámetro que funcione para todas las imágenes, es por ello que se propone además que se haga una propuesta de análisis para la optimización de parámetros, es decir, lo que se desea es aplicar la Transformada Wavelet para mejorar el procesamiento de imágenes y su reconstrucción 3D.

1.3. Hipótesis

Se puede desarrollar un algoritmo usando Transformada Wavelet 1D para inferir la información 3D de objetos que tienen proyección de franjas mediante el procesamiento digital de imágenes, y que considere la etapa de desdoblamiento de fase, la cual determinará la altura del objeto.

1.4. Objetivos

El objetivo general del presente trabajo es:

- Desarrollar un algoritmo de desdoblamiento de fase utilizando alguna Transformada Wavelet.

De este trabajo se desprenden varias actividades:

- Proponer una metodología para la reconstrucción 3D en dos tipos de objetos: virtuales y reales.
- Desarrollar una rutina para contar el número de franjas que fueron proyectadas sobre un objeto, para su posterior reconstrucción.
- Desarrollar una rutina para el cálculo de la frecuencia espacial f_0 .

- Utilizar los diferentes tipos de Wavelets que se ocupan para el proceso de reconstrucción 3D (Morlet, Shannon, B-Spline).

1.5. Alcances y limitaciones

En el presente trabajo de tesis, se propone el desarrollo de un algoritmo de reconstrucción tridimensional de objetos virtuales y reales que tienen proyectados patrones de franjas, mediante la Transformada Wavelet. Para ello es necesario realizar el proceso en varias etapas, entre las cuales es necesario realizar las siguientes actividades:

- Definir la transformada Wavelet, de manera formal, así como las diversas Wavelets.
- Explicar los fundamentos del procesamiento de imágenes
- Calcular el número de franjas proyectadas a una imagen.
- Calcular la frecuencia espacial f_0 .
- Explicar la perfilometría Wavelet.
- Aplicar la metodología propuesta a objetos virtuales (creados por computadora), y objetos reales.

Todas estas actividades son parte del desarrollo de la metodología que se propone, para la reconstrucción tridimensional de un objeto en dos etapas:

Etapas 1. La reconstrucción de un objeto creado virtualmente. Esta fase es la que dará certidumbre al proceso propuesto, dado que se conoce de antemano la información y que al momento de reconstruirla se puede validar de manera certera.

Etapas 2. Incluye la reconstrucción tridimensional de un objeto real una vez que ya se haya validado el algoritmo en la Etapa 1.

Es importante mencionar que no todas las imágenes serán procesadas con el algoritmo que se propondrá, sólo lo harán aquellas imágenes que tengan un tamaño de 512×512 píxeles, esto

debido a que existe una relación entre el número de franjas proyectadas al objeto con el tamaño de la imagen, y como el procesamiento de la información se lleva a cabo de forma binaria, entonces es más adecuado procesar la información con imágenes cuyo tamaño provenga de una potencia de dos.

1.6. Organización de tesis

La tesis está dividida en cinco capítulos, de los cuales se hará una breve explicación de que se expondrá en cada uno de ellos.

En el capítulo 2, Transformadas, se hará un breve repaso de la definición de transformada, así como un breve glosario de las diversas transformadas que se han usado para el procesamiento de imágenes, mostrando la definición, sus propiedades y su clasificación, ahondando primordialmente en la Transformada Wavelet.

En el capítulo 3, titulado Perfilometría Wavelet, se explicará las diferencias entre las técnicas para el procesamiento de imágenes, desde las de no contacto con las de contacto. Dentro de las técnicas de contacto se explicará la de proyección de franjas, la cual se empleará a los objetos creados virtualmente y los reales.

En esa misma sección se hará un análisis acerca del desdoblamiento de fase y lo que implica el tener una fase envuelta, además de su importancia en la reconstrucción tridimensional de objetos.

Un capítulo importante de este trabajo, es el de Pruebas y Resultados, que se numeró con el capítulo 4, en el cual se mostrarán con imágenes las pruebas y los resultados que se hicieron para validar la metodología con elementos generados virtualmente, y con imágenes extraídas de un objeto al cual se le proyectaron franjas, para su procesamiento y reconstrucción. Ambos objetos, los generados virtualmente y los reales, se procesarán con la metodología de la Perfilometría Wavelet 1D, incluyendo la etapa del desdoblamiento de fase.

Y finalmente, en el capítulo 5 se presentan las conclusiones que se obtuvieron como resultado de la metodología propuesta para la reconstrucción tridimensional de objetos utilizando diferentes tipos de wavelets complejas, incluidas en este trabajo de investigación. Además se presentan los alcances y limitaciones del método propuesto y se sugieren algunas líneas de investigación como trabajo futuro.

Capítulo 2

Transformadas

Transformadas

En este capítulo se hace un pequeño análisis de cada una de las transformadas que hay en el ámbito de las matemáticas y que además se emplean en el procesamiento de señales, más específicamente en el procesamiento de imágenes. Se dará primero la definición de transformada y enseguida se hará una clasificación de las transformadas, entre las cuales podemos encontrar; Fourier, Gabor, Coseno y Wavelet, dando en principio su definición y posteriormente sus propiedades.

El procesamiento de imágenes utiliza para su estudio un ente matemático que es muy aplicable en la ingeniería: las transformaciones. Éstas deberán tener ciertas propiedades teniendo en cuenta que los elementos que han de procesarse a través de estas transformadas deberán formar parte de un conjunto llamado espacio vectorial. Los espacios vectoriales son un conjunto de elementos bajo las cuales se les definen dos operaciones binarias: suma y producto por escalar, y que además satisfacen algunas propiedades, que para efectos del presente trabajo se suponen conocidas.

Sin embargo, el tratamiento de imágenes no se puede realizar sobre cualquier espacio vectorial, sólo se puede aplicar a aquellos que son espacios vectoriales métricos. Una **métrica** es la generalización de la distancia o norma entre dos elementos de un espacio vectorial, llamados vectores. Los espacios vectoriales a los cuales se les puede asociar una determinada métrica se les llama **espacios vectoriales métricos**. Para el propósito de este trabajo, que es el del procesamiento de imágenes, sólo se utilizan los espacios métricos llamados **espacios L^p** , cuya definición está dada como sigue:

Definición 1. Sea Ω un subconjunto medible en \mathbb{R} y sea $p \in \mathbb{R}$ tal que $1 \leq p < \infty$. Se denota por $L^p(\Omega)$ al conjunto de clases de equivalencia de funciones medibles f tales que

$$\int_{\Omega} |f(x)|^p dx < \infty$$

Una transformada representa un cambio hacia un dominio diferente, que por sus propiedades facilita la realización de tareas determinadas. Este cambio puede caracterizarse mediante un operador que se denota por $T(\cdot)$, este operador se le aplicará a una señal, que está representada por una función f . Este cambio se puede representar mediante el siguiente diagrama:

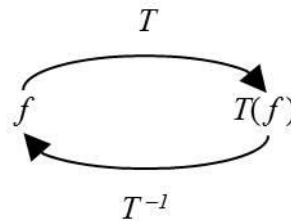


Figura 2.1. Diagrama de una transformada

Donde la T representa a la transformada directa y T^{-1} a la transformada inversa.

Las transformadas se utilizan principalmente para la reducción de la complejidad en problemas matemáticos, y por ende en la resolución de aplicaciones a la ingeniería, tales como el procesamiento de imágenes, para ello es necesario conocer las propiedades matemáticas básicas de estas transformadas para poderlas considerarlas en aplicaciones concretas.

El procesamiento de una imagen puede llevarse mediante un proceso en el dominio espacial de la señal (la imagen misma) o en un dominio transformado, el siguiente diagrama muestra el procesamiento de la imagen bajo el tratamiento de un cambio de dominio, es decir, haciendo uso de alguna transformada en particular:



Figura 2.2. Diagrama del procesamiento de imágenes usando transformadas

De las transformadas más utilizadas en las aplicaciones, principalmente en el procesamiento de imágenes están las de Fourier, de Coseno, la Gabor y la Wavelet, éstas tienen una característica especial, que son transformaciones lineales, es decir, satisfacen la siguiente

Definición 2. Sean V y W dos espacios vectoriales (sobre el campo F). Una función $T: V \rightarrow W$ se llama **transformación lineal** de V en W si para toda $x \in V$, $y \in V$ y $c \in F$, se tiene que

- a. $T(x + y) = T(x) + T(y)$ (Principio de Superposición)
- b. $T(cx) = cT(x)$ (Principio de Homogeneidad)

Todas y cada una de las transformaciones que se enuncian a continuación satisfacen la característica de ser transformaciones lineales, y se hará un breve análisis de cada una de ellas, así como de sus propiedades.

2.1 Transformada de Fourier

La transformada de Fourier ha sido una herramienta muy útil para el tratamiento de señales de cualquier tipo, entre ellas la del procesamiento de imágenes, por su amplia gama de aplicaciones.

Desde muy joven Joseph Fourier (1786–1830) sentía un gran interés por las matemáticas, tanto así que a la corta edad de 14 años terminó el estudio de seis volúmenes del “*Cours de mathématique de Bézout*” y a sus 15 años recibía el premio por su estudio de “*Bossut’s Méchanique en général*”.

En 1801 comenzó a estudiar el comportamiento del calor y cómo fluía de un punto a otro a través de un objeto en particular. Fourier sugirió que el problema se podía resolver mediante un simple patrón sinusoidal que debería atenuarse gradualmente hasta que la temperatura del objeto fuera uniforme.

En 1822 amplió su teorema y lo publicó en un libro llamado “*Théorie Analytique de la Chaleur*”, en el cual propone que toda señal periódica, puede ser reconstruida a partir de sinusoides cuyas frecuencias son múltiplos enteros de una frecuencia fundamental, eligiendo las amplitudes y fases adecuadas. Por ello es necesario conocer los elementos de la Transformada de Fourier, su definición y propiedades. El Teorema de Fourier tiene muchas aplicaciones, puede usarse en el estudio de sonido y de la luz, en cualquier fenómeno ondulatorio, el estudio de tales fenómenos, se llama análisis armónico.

Antes de que se dé una definición de la Transformada de Fourier y sus propiedades, es necesario conocer una definición previa: Las *funciones de Schwartz* son aquellas funciones definidas en \mathbb{R} que son infinitamente diferenciables y rápidamente convergentes a cero. Más formalmente:

Definición 3. Una función f se llama *función de Schwartz* si $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ y si $\lim_{|x| \rightarrow \infty} (1 + x^2)^k f^{(p)}(x) = 0$, para todo par de enteros no negativos k y p . Equivalentemente, f es una función de Schwartz si $\lim_{|x| \rightarrow \infty} P(x) f^{(n)}(x) = 0$, para todo entero no negativo n y para todo polinomio $P(x)$. El conjunto formado con funciones de Schwartz se denota por $S(\mathbb{R})$.^[1]

Otro aspecto teórico sumamente importante, es la métrica en los espacios vectoriales métricos, y que junto con las funciones de Schwartz, son conceptos que sientan las bases para que las Transformadas de Fourier, Gabor o Wavelet sean factibles de usarlas en el tratamiento de imágenes.

Definición 4. Para $f, g \in S(\mathbb{R})$, definimos

$$\hat{f}(\gamma) = \mathfrak{F}\{f(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi i x \gamma} dx \quad \dots (1)$$

$$\check{f}(x) = \mathfrak{F}^{-1}\{\hat{f}(\gamma)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\gamma)e^{2\pi i \gamma x} d\gamma \quad \dots (2)$$

La ecuación (1) es llamada la **Transformada de Fourier** de f , y la ecuación (2) es la **Transformada Inversa de Fourier** de \hat{f} . [1]

2.1.1. Propiedades

A continuación, se enlistan una serie de propiedades algebraicas y analíticas de la Transformada de Fourier, así como uno de los teoremas que relacionan a la Transformada de Fourier con su Transformada Inversa.

Proposición 1. Propiedades algebraicas de la transformada

- 1.1. Linealidad. $\mathfrak{F}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathfrak{F}(f) + \beta \mathfrak{F}(g)$
- 1.2. Conjugación. $\mathfrak{F}\{\bar{f}(\xi)\} = \overline{\hat{f}(-\xi)}$
- 1.3. Traslación. Si $\tau_h f(x) = f(x + h)$, entonces $\mathfrak{F}\{(\tau_h f)(\xi)\} = \hat{f}(\xi)e^{2\pi i h \xi}$
- 1.4. Modulación. Si $g(x) = f(x)e^{2\pi i h x}$, entonces $\hat{g}(\xi) = (\tau_{-h} \hat{f})(\xi)$
- 1.5. Dilatación. Si $g(x) = \lambda^{-1} f(\lambda^{-1} x)$ y $\lambda > 0$, entonces $\hat{g}(\xi) = \hat{f}(\lambda \xi)$

Proposición 2. Propiedades analíticas de la transformada

- 2.1. f es una función uniformemente continua y $|\hat{f}(\xi)| \leq \|f\|_1$
- 2.2. Si f y f' son integrables, $(f')^\xi = 2\pi i \xi \hat{f}(\xi)$
- 2.3. Si $xf(x)$ es integrable, \hat{f} es derivable y $(-2\pi i x f)^\xi = (\hat{f})'(\xi)$
- 2.4. Lema de Riemann–Lebesgue: $\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \hat{f}(\xi) = 0$
- 2.5. Si f y g son integrables, $\int f \hat{g} d\xi = \int \hat{f} g d\xi$

Teorema 1. Si f y \hat{f} son integrables, entonces

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi \quad \text{en casi todos los puntos}$$

Además, el término de la derecha es una función continua en x , de modo que f coincide en casi todo punto con una función continua y se da la igualdad en los puntos de continuidad de f .

Entre las funciones de Schwartz existe una operación de suma relevancia, la convolución. Está operación permite conocer de manera muy simplificada la relación que existe entre la salida y la entrada de un sistema.

Definición 5. Dadas dos funciones integrables, f y g , se define la **convolución** $f * g$, como la función integrable dada por

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy \quad \dots (3)$$

Teorema 2. Si f y g son integrables, $\mathfrak{F}\{(f * g)(\xi)\} = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)$

2.1.2. Transformada de Fourier en senos y en cosenos

Se sabe que si una función está definida en $(0, \pi)$ se puede descomponer en una serie de Fourier de cosenos o una serie de Fourier de senos, de acuerdo con la extensión par o impar a $(-\pi, \pi)$. De la misma manera se puede escribir la Transformada de Fourier sólo con una integral de senos o cosenos.

Definición 6. Dada una función f en se define su **Transformada de Fourier en cosenos** como

$$\hat{f}_c(\xi) = 2 \int_0^{\infty} f(x) \cos 2\pi x \xi dx \quad \dots (4)$$

Y su **Transformada de Fourier en senos** como

$$\hat{f}_s(\xi) = 2 \int_0^{\infty} f(x) \sin 2\pi x \xi \, dx \quad \dots (5)$$

2.2 Transformada Gabor

En 1946 Dennis Gabor, nacido como Dénes Günszberg, introduce un análisis de tiempo–frecuencia, la cual es conocida como “Transformada de corto tiempo de Fourier” (STFT). La idea es usar una función “ventana” g en cualquier posición para realizar el análisis de Fourier, y luego cambiar la “ventana” en otra posición, y así sucesivamente.

Definición 7. Sea $g \in L^2(\mathbb{R})$ una ventana. La **Transformada de Gabor** continua de una señal de energía finita $f \in L^2(\mathbb{R})$ se define como

$$STFT = G_f(b, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) g^*(t - b) e^{-i\omega(t-b)} \, dt,$$

donde b es la posición en la que se hace el análisis y $*$ denota el complejo conjugado a la ventana de análisis $g(t)$.

El conjunto de los coeficientes de $G_f(b, \omega)$ se le llama la representación de Gabor de la señal f .

El uso de la transformada de Gabor en el procesamiento de señales es eficiente cuando se desea identificar y caracterizar señales cuyos patrones de frecuencia estén bien definidos, no superpuestos y relativamente largos, con respecto a la ventana en donde se hacer el análisis. Y se puede utilizar para determinar la frecuencia y la fase en regiones locales de una señal que va cambiando en el tiempo.

2.3 Transformada Wavelet

El tratamiento de imágenes con base en la Transformada de Fourier ha sido un proceso muy utilizado, que en algunas ocasiones no era muy útil, porque en el análisis de una señal a partir de ella, pudiera omitir algunas singularidades en la señal o no hacer una diferencia entre una frecuencia alta o baja.

Siguiendo los desarrollos de la Transformada de Gabor, aparece en la historia de la matemática un nuevo método para el análisis de una señal, la Transforma Wavelet.

La historia de las wavelets a pesar de que comienza en inicios del siglo XX, con Alfred Haar, sin embargo, como su propuesta de wavelet era discreta y se limitaba sólo a algunas aplicaciones, no se toma este año como su comienzo histórico, a pesar de que tenía un soporte compacto.

La década de los 80's es el inicio formal de la historia de las wavelets que comienzan siendo una herramienta prometedora para varias aplicaciones científicas, entre ellas las del procesamiento de imágenes.

Existen muchos científicos que han aportado sus conocimientos para el desarrollo de la Transformada Wavelet, entre ingenieros, matemáticos y físicos, algunos de ellos son: Levy, Marr, Grossman, Goupillaud, Weis, Coifman, entre otros. Algunos de ellos han sentado precedentes en el comportamiento de las onduletas, otros han visualizado el ámbito de uso de ellas, otros más las han clasificado de acuerdo con los parámetros requeridos para su desempeño. Uno de ellos Jean Morlet, desarrolló un nuevo análisis tiempo–frecuencia, usando lo que llamó “ondas de forma constante”.

Una wavelet es una onda cuya energía se concentra en el tiempo. Estas ondas son una herramienta muy útil en el análisis de fenómenos no estacionarios y variantes en el tiempo. Que al igual que el análisis de Fourier se basa en el principio de superposición de las señales para determinar una

aproximación, con la diferencia que el análisis con wavelets se puede variar tanto en la frecuencia como en la escala.

Otra ventaja que tienen las wavelets es que no son únicas, sino que existen una gama de funciones que pueden considerarse en el uso de la Transformada Wavelet, llamadas funciones generadoras, funciones madres o simplemente wavelet madres, todas ellas localizadas tanto en la frecuencia como en el tiempo.

Definición 8. Una **wavelet** es una señal oscilatoria de corta duración cuya energía es finita y se encuentra concentrada en un determinado intervalo de tiempo.

Para que una función $\psi(t)$ sea llamada wavelet debe de cumplir con ciertos requerimientos matemáticos, de acuerdo con lo que menciona la definición:

1. $\psi(t)$ debe tener energía finita, es decir debe ser un elemento del espacio $L^2(\mathbb{R})$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|\psi(t)\|^2 dt < \infty$$

2. $\psi(t)$ debe cumplir con el criterio de admisibilidad C_ψ , que significa que debe tener componente de frecuencia cero, $\Psi(0) = 0$, donde $\Psi(f)$ es la transformada de Fourier de la wavelet.

$$C_\psi = \int_0^{\infty} \frac{\|\psi(t)\|^2}{f} dt < \infty$$

3. Si $\psi(t)$ es compleja, $\Psi(f)$ es real y desvanecida para frecuencias negativas.

Definición 9. Sea $\psi: D \rightarrow R$ una función del tipo $L^2(R)$, denominada función generadora, de tal forma que las funciones $\psi_{a,b}$ definidas por transformaciones de dilatación (o contracción) y de traslación a partir de ψ

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{|a|^{1/p}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right), \text{ con } p > 0, a, b \in R, a \neq 0 \quad \dots (6)$$

formen una base de funciones. La familia de wavelets son las funciones $\psi_{a,b}$, siendo con frecuencia el valor $p = 2$ el más usado. Donde a es el parámetro que realiza contracciones o dilataciones (escalamiento), mientras que b es el parámetro que cambia la posición de la señal en el tiempo (traslación).

Cómo se puede apreciar en la definición de wavelet, es un concepto netamente teórico y continuo, sin embargo, cuando se trata de analizar una señal mediante el uso de la computadora, entonces es necesario replantear el concepto y discretizarla, por lo que la familia de wavelets definida previamente, se tiene que usar a la familia de wavelets ortonormales definidas como:

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k), \quad j, k \in Z.$$

j es el parámetro entero que escala la función y k el que la traslada a la señal.

Y para analizar el dominio de la señal en multiresolución, la wavelet madre ψ está dada por:

$$\phi(t) = \sum_{k=-1}^{N-2} (-1)^k \cdot C_{k+1} \psi(2t + k)$$

Dónde C_k son los coeficientes wavelets, aunque puede tomarse como un “filtro”.

Si se conoce que una familia de funciones $\{\psi_{a,b}\}$ puede emplearse para la descomposición de una función f , de tal manera surge la definición de Transformada Wavelet Continua, que se escribe a continuación: El proceso de aplicar la Transformada Wavelet a una señal se le llama análisis, mientras que el proceso inverso, se le conoce como síntesis.

Definición 10. Sea $\{\psi_{a,b}\}_{(a,b) \in R \times R}$ una familia de funciones definidas por (5), y dada una función $f(t)$ de cuadrado integrable, la **Transformada Wavelet Continua** de $f \in L_2(R)$ es la descomposición de f mediante el conjunto de funciones base $\psi_{a,b}$:

$$\Psi_f(a, b) = \int_{DL} f(t)\psi_{a,b}^*(t)dt \quad \dots (7)$$

donde * representa la conjugada compleja, y DL es el soporte compacto de $\psi(t)$, la función generadora.

2.3.1. Funciones generadoras

Hay diversos tipos de funciones generadoras de la Transformada Wavelet Continua, entre ellas están las Wavelet: Haar, Morlet, Debauchies, Shannon, Mexican Hat, B-Spline, entre otras. En esta sección se mostrará las definiciones de cada una de estas Wavelets.

Wavelet Haar

Definición 11. La Wavelet Haar es una función definida en la línea real \mathbb{R} como:

$$H(t) = \begin{cases} 1, & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ -1, & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad \dots (8)$$

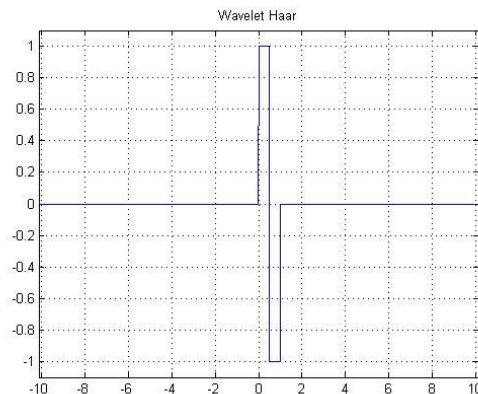


Figura 2.3. Gráfica de la Wavelet Haar

Wavelet Stromberg

Para construir la Wavelet Stromberg es necesario definir algunos subconjuntos de \mathbb{R} , tales conjuntos son:

$$Z_+ = \{1, 2, 3, 4, \dots\}, \quad Z_- = -Z_+, \quad A_0 = Z_+ \cup \{0\} \cup Z_-, \quad A_1 = A_0 \cup \left\{\frac{1}{2}\right\}$$

Definición 12. Dado un subconjunto discreto $V \subset \mathbb{R}$, sea $S(V)$, el espacio de funciones $f \in L^2(\mathbb{R})$, el cual es continua sobre \mathbb{R} y lineal en todo intervalo $I \subset \mathbb{R}$ tales que $I \cap V = \emptyset$.

Definición 13. La Wavelet Stromberg es una función $S \in S(A_1)$ tal que $\|S\|_2 = 1$ y S es ortogonal a $S(A_0)$.

Teorema 3. La imagen de los puntos del conjunto A_1 bajo la wavelet Strömberg S está dada por

$$S(k) = S(1)(\sqrt{3} - 2)^{\{k-1\}}, \quad \text{para } k = 1, 2, 3, \dots$$

$$S\left(\frac{1}{2}\right) = -S(1)\left(\sqrt{3} + \frac{1}{2}\right)$$

$$S(0) = S(1)(2\sqrt{3} - 2)$$

$$S\left(-\frac{k}{2}\right) = S(1)(2\sqrt{3} - 2)(\sqrt{3} - 2)^k, \quad \text{para } k = 1, 2, 3, \dots$$

donde $S(1)$ es un punto fijo tal que $\|S\|_2 = 1$. Nótese que como $S \in S(A_1)$, Las imágenes determinan que S es completo.

Algunos hechos de la wavelet Strömberg que se siguen del Teorema

a. Oscila, porque $\sqrt{3} - 2 < 0$ cambia de signo entre cualesquiera dos puntos de A_1 .

- b. Tiene un decaimiento exponencial, es decir, existe una constante C y $\alpha > 0$, tal que $|S(t)| \leq C e^{-\alpha|t|}$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Obviamente $\alpha = -\ln(2 - \sqrt{3})$
- c. Pertenece al espacio vectorial $L^p(\mathbb{R})$, para todo $1 \leq p \leq \infty$
- d. Cómo se sabe que $S\left(-\frac{k}{2}\right) = (10 - 6\sqrt{3})S(k)$, para $k = 1, 2, \dots$ esto muestra que S es simétrico. Esta simetría refleja que A_1 es dos veces denso en $(-\infty, 0]$ así como en $[0, \infty)$

Wavelet Meyer

Para definir la Wavelet Meyer, es necesario comenzar partiendo que el conjunto S es de Schwartz, y definiendo la función $\theta(\xi)$ definida en \mathbb{R} satisfaciendo las siguientes condiciones:

$$0 \leq \theta(\xi) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

$$\theta(\xi) = \theta(-\xi)$$

$$\theta(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \text{para } |\xi| < \frac{2}{3}\pi$$

$$\theta(\xi) = 0, \quad \text{para } |\xi| > \frac{4}{3}\pi$$

$$\theta^2(\xi) + \theta^2(\xi - 2\pi) = \frac{1}{2\pi} \text{ para } 0 \leq \xi \leq 2\pi$$

Claramente existe una función $\Phi \in L^2(\mathbb{R})$, tal que $\Phi = \theta$. Porque θ es un soporte compacto Φ siempre que C^∞ .

Definición 14. La función ψ definida como $\hat{\psi}(\omega) = b(\omega)e^{i\omega/2}$, donde

$$b(\omega) = \begin{cases} \text{sen}\left(\frac{3}{4}\left(|\omega| - \frac{2}{3}\pi\right)\right) & \frac{2}{3}\pi < |\omega| \leq \frac{3}{4}\pi \\ \text{sen}\left(\frac{3}{8}\left(\frac{8}{3}\pi - |\omega|\right)\right) & \frac{4}{3}\pi < |\omega| \leq \frac{8}{3}\pi \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Es llamada Wavelet Lemaríe–Meyer

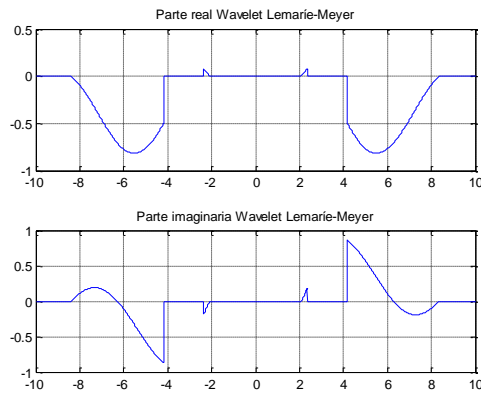


Figura 2.4. Gráfica de la wavelet Lemarié-Meyer

Wavelet B-Spline

Definición 15. Sea a un número real positivo y sea $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ cualquier entero. Un *spline* de orden n con nodos en $a\mathbb{Z}$ es una función f definida en \mathbb{R} , la cual es de clase C^{n-1} y es un polinomio de grado a lo más con n restricciones para cada intervalo $[ja, (j+1)a]$ para $j \in \mathbb{Z}$. El espacio de todos los splines de orden n con nodos en $a\mathbb{Z}$ se denotará por $S^n(a\mathbb{Z})$.

Definición 16. Para $n = 0, 1, 2, \dots$ se define las funciones $N_n(x)$, llamadas *B-Spline de orden n* , cómo:

- $N_0 = 1_{[0,1]}$
- Para $n > 0$, se define N_n inductivamente como $N_{n+1} = N_n \cdot N_0$. Es claro que $N_n = N_0 \cdot N_0 \cdot \dots \cdot N_0$ con $n + 1$ factores.

Algunas propiedades de la wavelet B-Spline están dadas en el teorema siguiente.

Teorema 4. Para $n = 0, 1, 2, \dots$ las funciones $N_n(x)$ tienen las siguientes propiedades:

- $N_n(x) > 0$, para $x \in (0, n + 1)$
- $\text{supp } N_n = [0, n + 1]$
- $N_n \in S^n(\mathbb{Z})$
- $\sum_{k \in \mathbb{Z}} N_n(x - k) = 1$
- $N_n\left(\frac{n+1}{2} + x\right)$, para toda $x \in \mathbb{R}$
- $N'_{n+1}(x) = N_n(x) - N_n(x - 1)$

Definición 17. La Wavelet ψ B-Spline Compleja se define como

$$\psi(x) = \sqrt{f_b} e^{2\pi f_c x i} \left(\text{sinc} \left(\frac{f_b x}{m} \right) \right)^m$$

donde f_b es el ancho de banda, f_c es la frecuencia central y m es el orden entero de la wavelet.

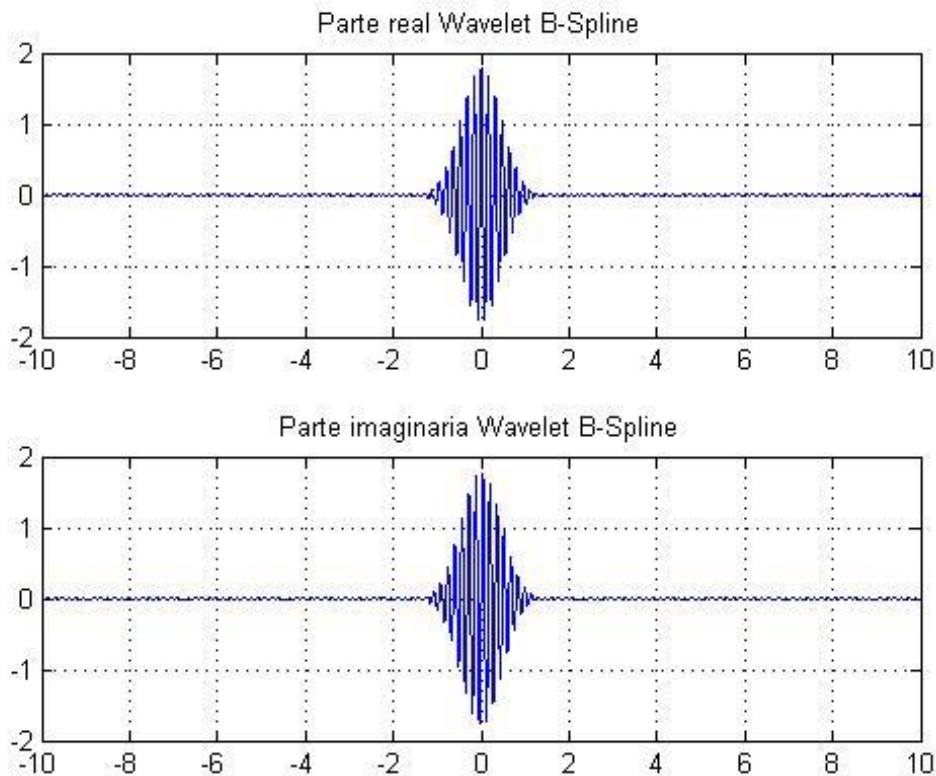


Figura 2.5. Gráfica de la Wavelet B-Spline Compleja

Wavelet Shannon

Definición 18. La función ψ definida por

$$\hat{\psi}(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega \in [-2\pi, -\pi) \cup [\pi, 2\pi) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

es llamada Wavelet Shannon.

Sin embargo, hay una definición que expresa a la Wavelet Shannon Compleja, esta es:

Definición 19. La función ψ definida por

$$\hat{\psi}(\omega) = \sqrt{f_b} e^{2\pi f_c x i} \text{sinc}(f_b x)$$

es llamada Wavelet Shannon Compleja, donde f_b es el ancho de banda, f_c es la frecuencia central.

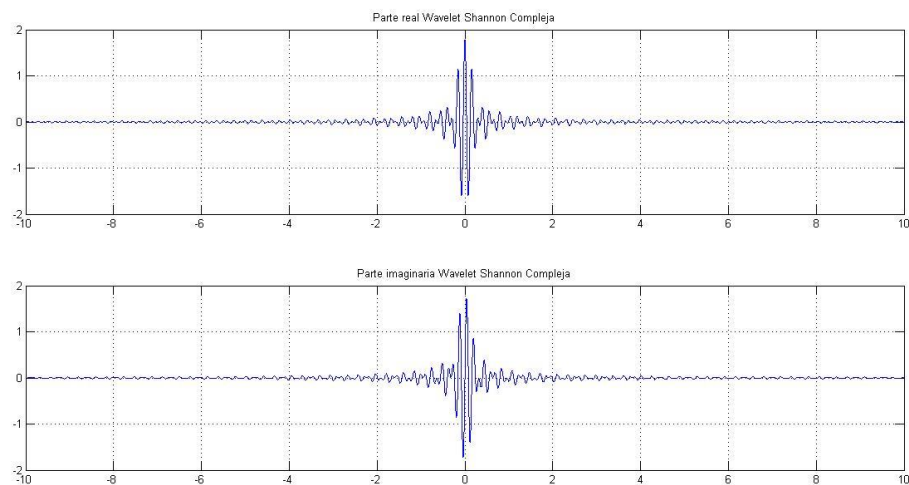


Figura 2.6. Gráfica de la Wavelet Shannon Compleja.

Wavelet Mexican Hat

Definición 1. La función definida por

$$\psi(x) = (1 - x^2)e^{-x^2/2} \quad \dots (8)$$

Es conocida como la Wavelet Mexican Hat.

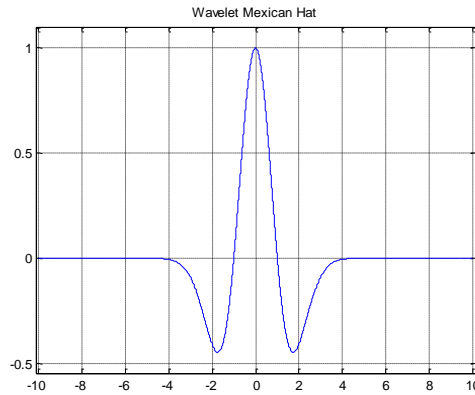


Figura 2.7. Gráfica de la Wavelet Mexican Hat

Wavelet Morlet

Definición 2. La función definida por

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}} e^{i2\pi\omega_0 x} e^{-x^2/2} \quad \dots (8)$$

Es conocida como la Wavelet Morlet.

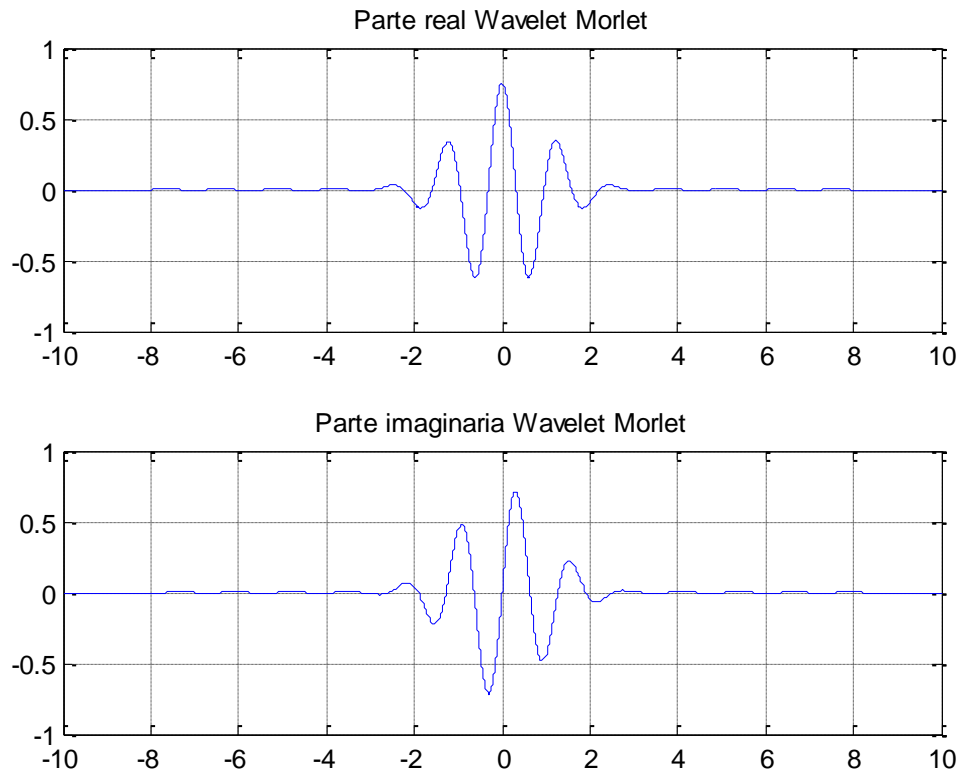


Figura 2.8. Gráfica de la Wavelet Morlet.

2.3.2. Propiedades de la Transformada Wavelet Continua

Enseguida se enumeran una serie de propiedades algebraicas y analíticas de la Transformada Wavelet Continua.

Proposición 3. Sean f y g dos funciones de cuadrado integrable de una variable real, es decir; $-f, g \in L^2(\mathbb{R})$ -. Sea $W_\psi [f(t)] \equiv W(a, b)$, la Transformada Wavelet Continua aplicada a la función f . Entonces se cumplen las siguientes propiedades:

1. Linealidad. $W_\psi [\alpha f(t) + \beta g(t)] = \alpha W_\psi [f(t)] + \beta W_\psi [g(t)]$ para α, β escalares.
2. Traslación. $W_\psi [f(t - \tau)] = W(a, b - \tau)$

3. Escalamiento. $W_{\psi} \left[\frac{1}{\sqrt{\alpha}} f \left(\frac{t}{\alpha} \right) \right] = W \left(\frac{a}{\alpha}, \frac{b}{\alpha} \right)$, para $\alpha > 0$
4. Traslación de Wavelet. Sea $\hat{\psi}(t) = \psi(t - \tau)$. Entonces $W_{\hat{\psi}} [f(t)] = W(a, b + a\tau)$
5. Escalamiento de Wavelet. Sea $\hat{\psi}(t) = \frac{\psi\left(\frac{t}{\alpha}\right)}{\sqrt{|\alpha|}}$. Entonces $W_{\hat{\psi}} [f(t)] = W(\alpha a, b)$
6. Combinación lineal de Wavelets. Dadas dos wavelets $\psi_1(t)$ y $\psi_2(t)$, su combinación lineal $\alpha\psi_1(t) + \beta\psi_2(t)$, para α, β escalares, es también una wavelet. Se tiene que $W_{\alpha\psi_1(t) + \beta\psi_2(t)} [f(t)] = \alpha W_{\psi_1} [f(t)] + \beta W_{\psi_2} [f(t)]$

2.3.3. Transformada Wavelet Inversa

Cuando se desea resolver un problema, y éste está en el espacio tiempo, no es tan sencillo de resolverlo, entonces es cuando se hace uso de la herramienta matemática conocida y bien fundamentada, la transformada. Sin embargo, cuando se transforma una función, resulta que el problema se traslada a otro espacio vectorial. Aunque se haya cambiado a un espacio más sencillo, la realidad es que se deseaba resolverlo en el espacio primario, y no en uno transformado, es por ello que se utiliza otra herramienta matemática para regresarlo al espacio original, esta función se define por la Transforma Inversa. En nuestro problema, el tratamiento de imágenes bajo la transformada Wavelet no es la excepción, una vez que la imagen ha sido tratada bajo cualquier wavelet, es necesario regresarla al contexto original, es decir, es necesario definir la Transformada Wavelet Inversa.

Definición 3. Si la wavelet madre satisface la condición $C = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\Psi(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega$ y es tal que $0 < C < \infty$, entonces

$$f(t) = \frac{1}{C} \int_{a=-\infty}^{\infty} \int_{b=-\infty}^{\infty} \frac{1}{|a|^2} W(a, b) \psi_{a,b}(t) da db$$

es la **Transformada Inversa de la Wavelet Continua.**

El uso de una transformada para resolver un problema es muy útil, dado que algunos de ellos pueden cambiarse a otro conjunto de funciones en donde sea más fácil de resolver. Tal es el caso del procesamiento de señales, usando primordialmente las Transformadas de Fourier y Wavelet. En el caso de la reconstrucción 3D de un objeto, que es el objetivo de estudio del trabajo de tesis, se desea conocer la información de una señal bidimensional, usando la transformada Wavelet 1D. A pesar de que se desea realizar una reconstrucción tridimensional de un objeto a partir de una imagen bidimensional, se realiza el tratamiento de la señal usando la Transformada Wavelet unidimensional, debido a que ésta fue aplicada a cada uno de los renglones que forman a la imagen.

Capítulo 3

Perfilometría Wavelet

Perfilometría Wavelet

El procesamiento digital de señales ha traído consigo grandes cambios, que van de la parte teórica (matemática) a la de la tecnología (software o dispositivos electrónicos, inclusive ambos). Esto implica que el procesamiento de señales sea una herramienta poderosa para más de una aplicación. Entre ellas está la de restaurar señales que hayan sido degradadas de algún modo o que tengan ruido, o la de resaltar alguna parte interesante de la señal, o reconocimiento de patrones en la señal, maquinar objetos sólidos a partir de una simulación de un proceso, formar parte del proceso de calidad de alguna industria, entre otros fines. Por lo anterior, parece necesario dar una definición de señal:

Definición 1. Una *señal* es una función de una o más variables independientes que contienen información acerca de la naturaleza o comportamiento de algún fenómeno.

Dado que esta definición parte del proceso de un fenómeno, puede ser útil acotar otros conceptos, que son parte fundamental de éste, tal es el caso del término sistema.

Definición 2. Un *sistema* recibe señales de entrada y responde a ellas produciendo otras señales a la salida. En otras palabras, es una relación biunívoca entre señales, las de entrada y las de salida.

La definición anterior parece muy sencilla pero no por eso deja ser importante en muchos fenómenos físicos, el que trasciende para este trabajo es el del procesamiento de imágenes, por lo que es fundamental tener un diagrama de la relación entre señales y sistema.

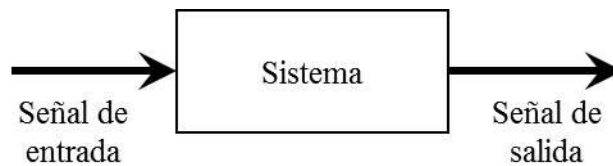


Figura 3.1. Diagrama de la relación entre señal y sistema.

Hay diversas clases de señales (analógicas, muestreadas, cuantizadas y digitales), y diversos métodos para procesarlas. Sobretudo tratándose en el procesamiento de imágenes en 3D, los más destacados son los métodos por enfoque, los de triangulación activa o pasiva, los de estéreo–visión, etc. Además de los métodos como la perfilometría de Fourier, Perfilometría Modificada de Fourier [1] y los de la perfilometría Wavelet, estos últimos usan el desdoblamiento de fase para obtener la información 3D de los objetos que se encuentran en la imagen.

Entre los métodos que se mencionaron anteriormente se pueden clasificar como:

- Pasivos (los de no contacto físico). Se hace la reconstrucción 3D a partir de imágenes tomadas desde diferentes puntos de vista, entre ellos están los de:
 - Proyección por foco
 - Profundidad por foco
 - Visión estéreo

- Activos (aquellos que tienen contacto físico). Estos métodos usan el principio de triangulación, utilizando la proyección de energía en la escena y detectan la energía que se les reflejó, entre las técnicas más usadas son las de:
 - Radar
 - Proyección de franjas
 - Luz estructurada
 - Proyección de franjas
 - Láser, envía un haz láser a la escena y mide el tiempo que tarda en volver. Sirve para objetos que reflejen en todas las direcciones.
 - Triangulación
 - Métodos de proyección de luz estructurada

- Análisis con múltiples imágenes (phase shifting profilometry)
- Análisis con una sola imagen
 - Perfilometría de Fourier
 - **Perfilometría Wavelet**

3.1 Perfilometría Wavelet

La perfilometría es una de las técnicas para identificar, medir o caracterizar el perfil de un determinado objeto. Ésta técnica se utiliza en distintas ramas de la ciencia y la tecnología; para distintos fines, dependiendo del enfoque para el que fue propuesto, y sus aplicaciones impactan desde la ingeniería hasta la medicina, siempre con el apoyo de la computación. Esta técnica es usada para el procesamiento de señales, en el trabajo de tesis se usará para reconstruir un objeto, representado por una señal.

Dentro de los métodos de esta técnica se encuentran la perfilometría de Fourier y la de Wavelet. La perfilometría de Fourier es la más usada históricamente y la que por consiguiente ha tenido mayor cantidad de resultados. En comparación, la perfilometría Wavelet es una técnica recientemente estudiada y aplicada, lo que impacta que sea un área de oportunidad para trabajos de investigación. Una característica que tienen estos métodos está la de localizar un dato importante en el procesamiento de señales, la frecuencia espacial f_0 .

La perfilometría Wavelet tiene como sustento a la Transformada Wavelet, y desde la década de los 80's, se ha convertido en una opción potencial para calcular la fase envuelta en el método de proyección de franjas. Dentro de las señales hay dos tipos de señales dependiendo de la frecuencia:

- las estacionarias, aquellas cuya frecuencia no cambia con el tiempo;
- las no estacionarias, que son aquellas cuya frecuencia cambia con el tiempo.

La transformada Wavelet es una poderosa herramienta para procesar señales no estacionarias por sus propiedades de ser una técnica de multi-resolución y tener una muy buena representación de la señal en el espacio dominio-tiempo de la frecuencia.

Hay propuestas de investigadores, usando la Transformada Wavelet Continua Unidimensional (TWC-1D). La TWC-1D se usa en el primer renglón de las franjas proyectadas de la imagen y la transforma en dos arreglos bidimensionales, uno para el módulo y otro para la fase, en los cuales se encuentra la información de la altura del objeto. Este proceso se repetirá a todos y cada uno de los renglones de la imagen de las franjas proyectadas en la imagen. El resultado de aplicar la TWC-1D es un mapa de fase que contiene la altura del objeto. Después de esto se aplican algoritmos de desenvolvimiento de fase para recuperar la altura del objeto. Una de las desventajas de este método es que la estimación de la fase no es muy acertada cuando la proyección de franjas tiene ruido.

3.1.1. Desenvolvimiento Directo de la Fase

Es una de las técnicas más “antiguas” que se usan para la detección de la fase en la teoría de las comunicaciones para analizar el modelo de proyección de franjas. Se fundamenta en usar una serie de filtros “ideales”, tales son los filtros pasa banda (BFP) para que se elimine la luz de fondo y el ruido que hay en la frecuencia. Después se aplica la Transformada Wavelet, para que el resultado sea usado con un filtro pasa baja (LPF) para atenuar los componentes de la frecuencia. El mapa de fase que se extrae de la está entre $(-\pi, \pi)$, es por ello que se usa un algoritmo para quitar las ambigüedades inherentes a 2π

Un diagrama de flujo que explica los pasos para la reconstrucción 3D usando la TWC-1D, es la que se muestra a continuación.

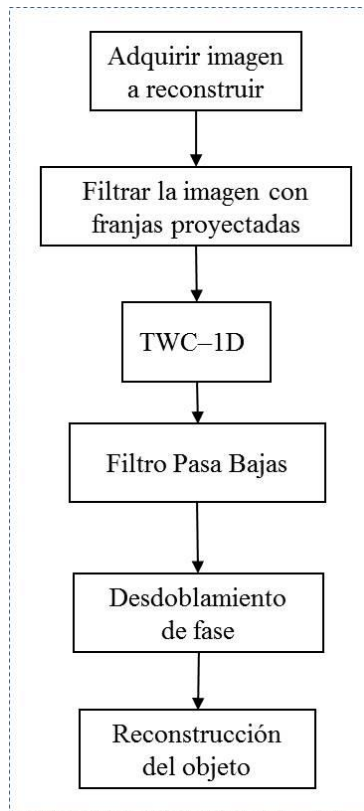


Figura 3.2. Diagrama de uso de la TWC-1D

El tratamiento matemático se ilustrará más adelante en este capítulo.

3.2 Metodología propuesta

La metodología que se propone para la reconstrucción 3D con Perfilometría usando la Transformada Wavelet se muestra con el diagrama de flujo:

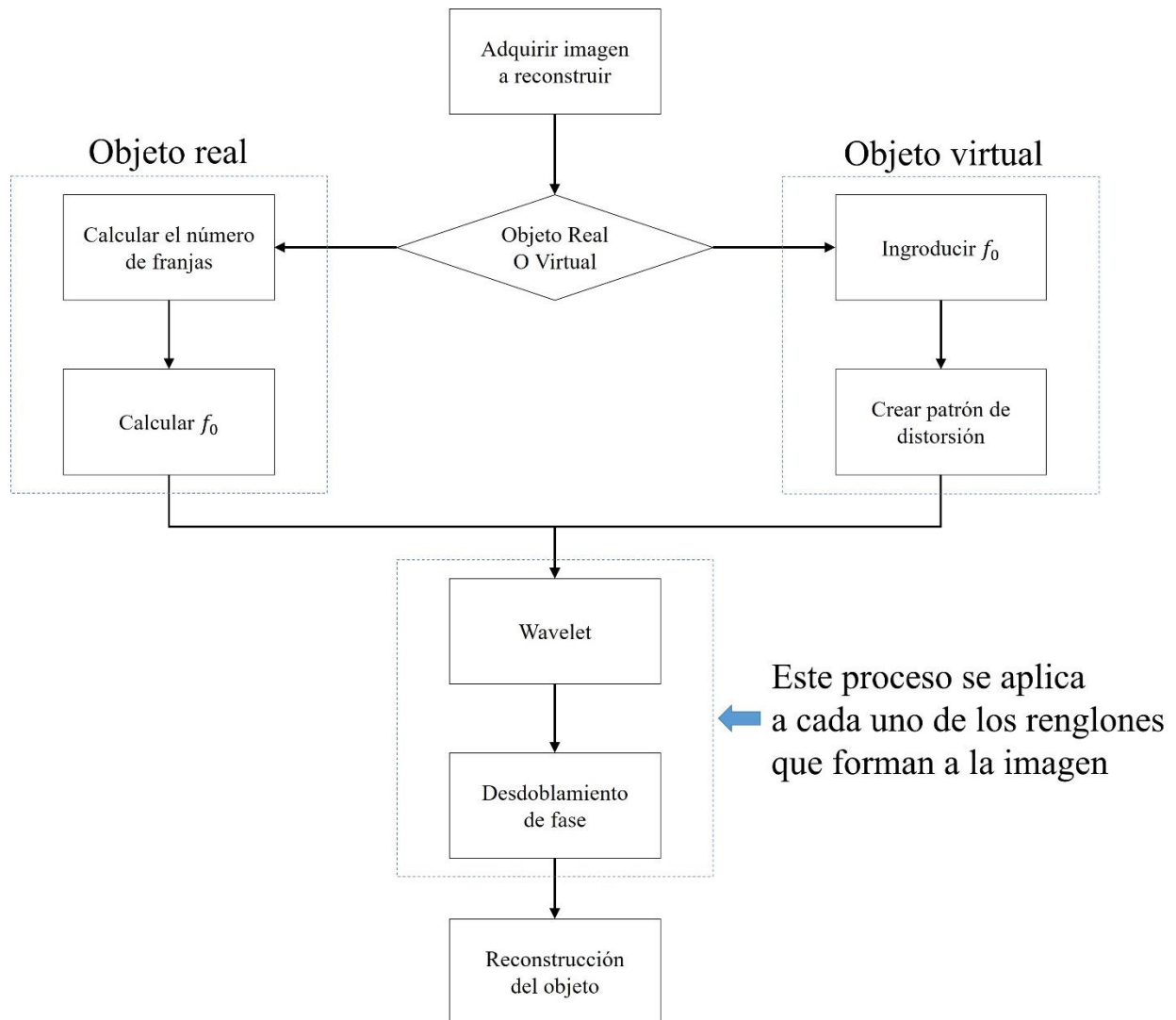


Figura 3.3. Diagrama de flujo de la metodología propuesta

La implementación del método para la reconstrucción 3D incluye varias fases:

3.2.1. Adquisición de la imagen

La imagen va a ser adquirida a través del método de proyección de franjas basado en la triangulación, este método es una técnica óptica para recuperar la forma de objetos 3D, se basa en la proyección de franjas. Esta técnica usa el hecho de que la superficie que se desea estudiar,

ocasiona que las franjas que se le han proyectado sufran desviaciones en su trayectoria proporcionales al relieve, se obtiene la información de la fase y la fase desenvuelta que es modulada por el contorno del objeto.

3.2.2. Selección de una imagen

Hay dos etapas en la metodología, la primera en la validación del método que es cuando se harán las pruebas con objetos generados de manera virtual, y la etapa en la que se harán las pruebas con objetos reales, a los cuales se les ha proyectado el patrón de franjas.

Metodología aplicada a un objeto Virtual

Cuando se hacen las pruebas con objetos virtuales se tiene toda la información necesaria para la reconstrucción 3D, dado que se le debe alimentar al programa con la frecuencia espacial y generar las franjas. La ventaja de utilizar un objeto virtual es que se conoce a priori el número de franjas (directamente relacionado con f_0) que se desea proyectar, el cual servirá para la etapa de filtrado en la metodología propuesta.

Frecuencia espacial

La frecuencia espacial es un dato que ayudará a determinar la altura del objeto, este dato es muy importante para la reconstrucción 3D de un objeto, el algoritmo que se propone en el trabajo de tesis para calcular la f_0 se muestra en un diagrama de flujo descrito en la figura 3.4.

Proyección de franjas

El análisis de los algoritmos de la proyección de franjas puede ser clasificado en dos categorías: la técnica espacial y la técnica temporal.

Los algoritmos de la técnica espacial calculan la fase de un pixel en un patrón de franjas dependiendo de la vecindad de cada pixel. Algunos métodos son el análisis de franjas de Fourier, o la Transformada Wavelet y la demodulación de fase directa. Requiere de al menos un patrón de franjas para calcular los componentes de la fase. A estos métodos se les conoce como perfilometrías.

Por otro lado, los algoritmos de técnicas temporales, requieren de al menos tres imágenes para calcular los componentes de la fase de un patrón de franjas. Estos métodos se conocen comúnmente como métodos de cambio de fase (phase-shifting).

Metodología aplicada a un objeto Real

Cuando se hacen las pruebas con objetos reales es necesario conocer el número de franjas proyectadas para posteriormente calcular la frecuencia espacial, que es quien determinará la altura del objeto y ayudar a la reconstrucción 3D. En la mayoría de los casos el número de franjas proyectadas no es conocido, por lo cual se debe desarrollar un método para estimar este valor.

Franjas proyectadas

En el procesamiento de la imagen real, es necesario determinar el número de franjas proyectadas, para posteriormente conocer la frecuencia espacial, la cual sirve para poder llevar a cabo el muestreo de la señal cumpliendo con el Teorema de Nyquist.

Se requiere tener la imagen digitalizada y conocer la dimensión de la imagen y entrar a un proceso iterativo para calcular el número de franjas que han sido proyectadas en ella. Este proceso se muestra en el siguiente diagrama de flujo.

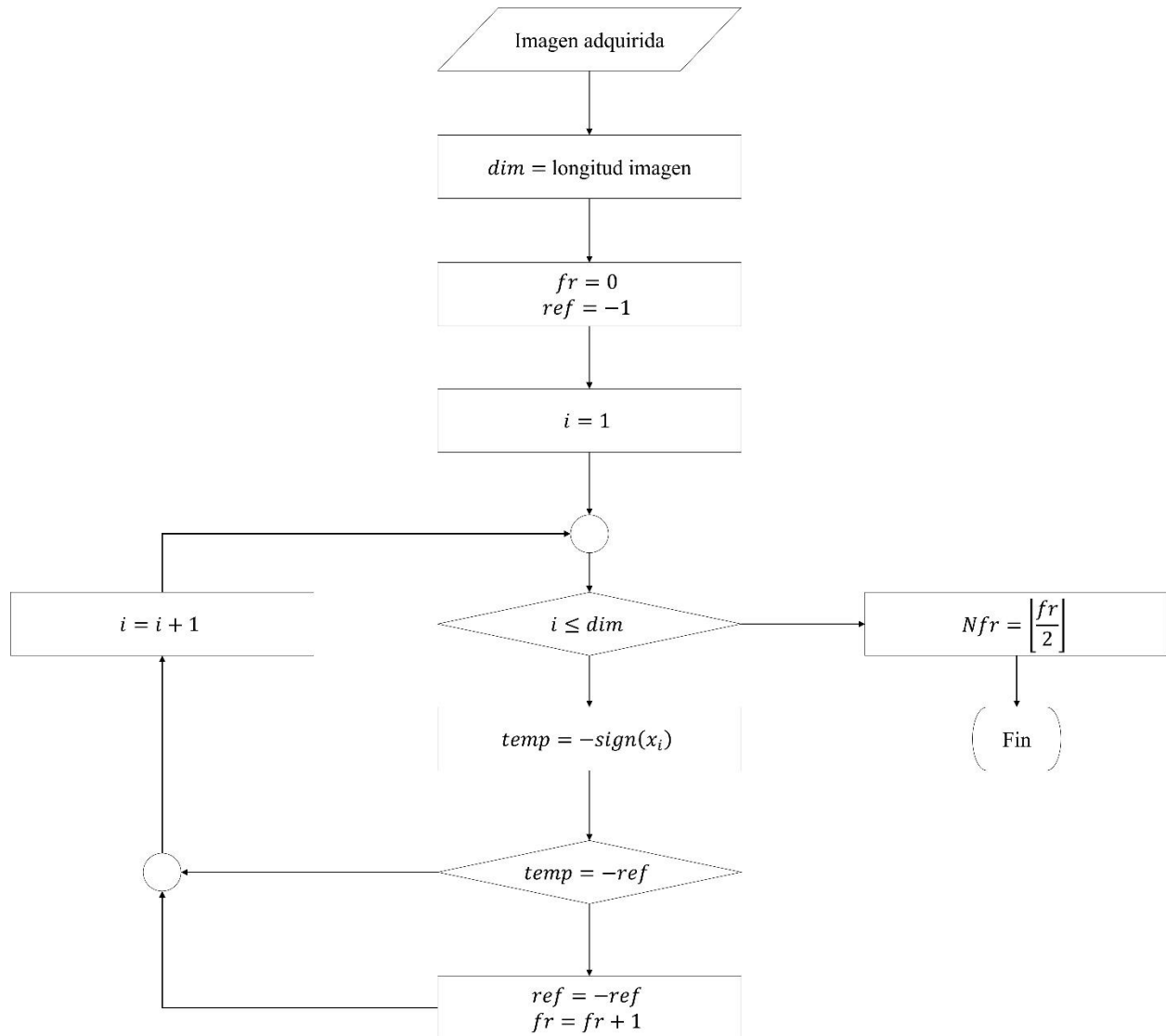


Figura 3.4. Diagrama de flujo para calcular el número de franjas.

Frecuencia espacial

Cuando se requiere de reconstruir un objeto real al cual se le hayan proyectado franjas, es necesario determinar la frecuencia espacial f_0 . Esta ayudará a determinar la altura del objeto 3D.

Para hacer el cálculo de la frecuencia espacial, se necesita saber el número de franjas que se le proyectaron al objeto real y que será la base la propuesta

Con el análisis previo a la reconstrucción tridimensional realizado a las imágenes se llegó a la conclusión que la frecuencia espacial se podría calcular como

$$f_0 = \frac{1}{den}$$

Donde

$$den = 2^{N_{fr}-i} - (N_{fr} - t_1) \frac{2^{N_f-1} - 2^{N_f-i-1}}{2^{N_1} - 2^{N_0}}$$

El algoritmo para calcular la frecuencia espacial requiere conocer el número de franjas que tiene proyectadas la imagen N_{fr} , y dado que las imágenes que se utilizaron para el trabajo de tesis fueron de tamaño 512×512 pixeles, se sabe que $2^9 = 512$, por lo cual será necesario tener cómo límite al real 9 como potencia de 2, el cual se le denotará como $N_f = 9$

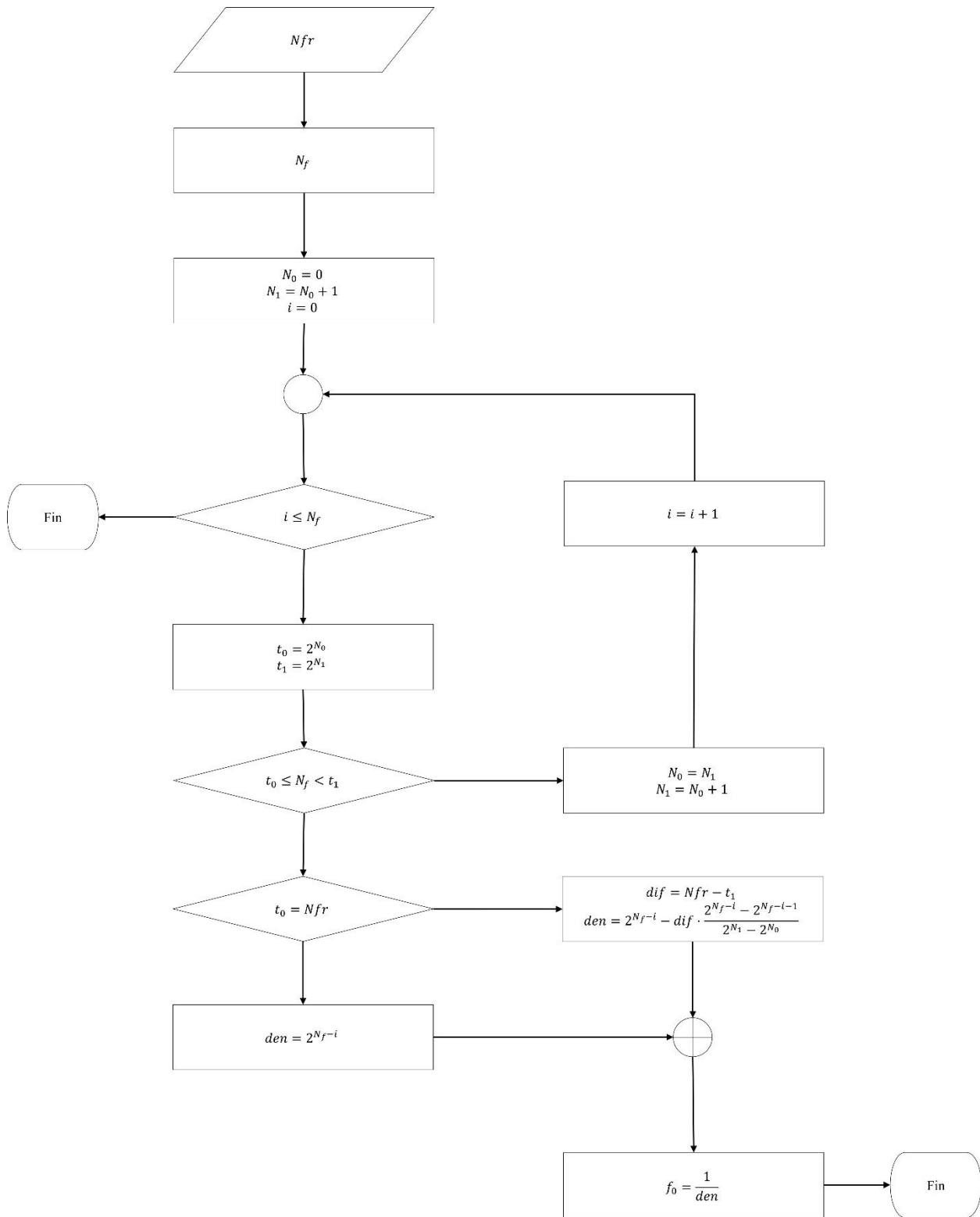


Figura 3.5. Diagrama de flujo para obtener la frecuencia espacial.

Aplicar perfilometría wavelet a una imagen a la cual le han sido proyectado franjas para su reconstrucción 3D, es un proceso que requiere de varias etapas, varias de las cuales son cruciales antes de aplicar la Transformada Wavelet. Entre las actividades requeridas son el cálculo del número de franjas y la frecuencia espacial, la cual se mostrará con un ejemplo en particular.

Si a un objeto se le han proyectado franjas como el de la figura 3.6, se procesará la información de ella y se determinará el número de franjas que tiene proyectadas en la imagen, para determinar la frecuencia espacial f_0 .

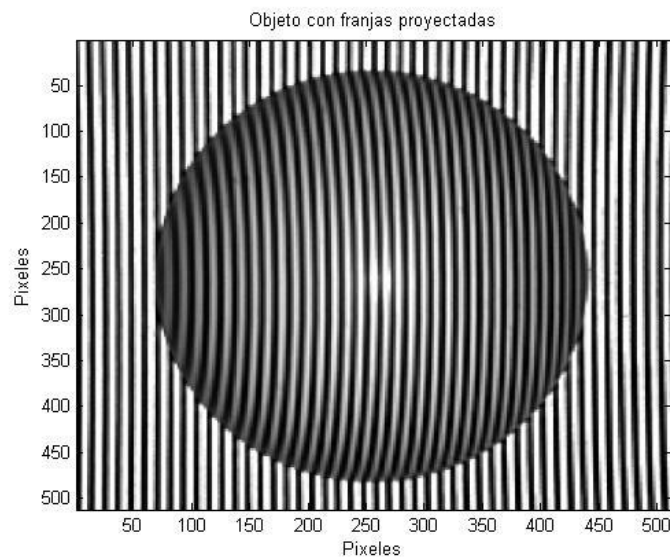


Figura 3.6. Imagen con franjas proyectadas

Si se elige un único renglón de entre todos los renglones que forman a la imagen, el comportamiento del mismo

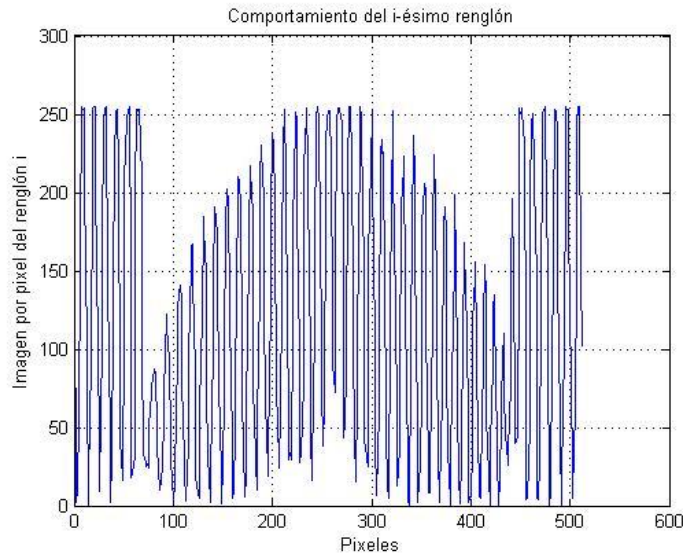


Figura 3.7. Comportamiento del renglón i , de la imagen con franjas proyectadas.

3.2.3. Aplicar la transformada Wavelet Morlet

El tratamiento matemático a la imagen al aplicar la transformada Wavelet continua en una dimensión es el siguiente:

Se aplica la Transformada Wavelet Continua

$$f(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt$$

a la imagen representada por $x(t)$ y a la wavelet madre $\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$,

sujeta a $C_{\psi} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\Psi(\omega)|}{\omega} d\omega < \infty$ y $\Psi(\omega)$ es la Transformada de Fourier.

Por otro lado, la ecuación de las franjas proyectadas es

$$g(x, y) = a(x, y) + b(x, y) \cos(2\pi f_0 x + \varphi(x, y)) \dots \dots (1)$$

Donde $a(x, y)$ es la iluminación del fondo, $b(x, y)$ es la amplitud, f_0 es la frecuencia espacial y $\varphi(x, y)$ es la modulación de la fase

Teniendo en cuenta que nos interesa la señal en una dimensión

$$f(x) = a(x) + b(x)\cos(2\pi f_0 x + \varphi(x))$$

Usando las identidades trigonométricas se sabe que el $\cos(x) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$

$$f(x) = a(x) + b(x)\cos(\varphi(x)) = a(x) + b(x) \frac{e^{i\varphi(x)} + e^{-i\varphi(x)}}{2}$$

$$f(x) = a(x) + b(x) \frac{e^{i\varphi(x)}}{2} + b(x) \frac{e^{-i\varphi(x)}}{2}$$

La representación anterior de la imagen es una representación continua, y como la reconstrucción del objeto se desea hacer en una computadora, entonces la representación de una función se hará a través de la serie de Taylor, que es una muy buena aproximación de cualquier función, por lo cual sólo se necesita que f sea una función analítica.

Si f es analítica en un abierto A , si además $z_0 \in A$ y suponer que

$D(z_0; r) \subset A \rightarrow f$, es decir f admite una descomposición en la serie de Taylor por lo cual la función que representa a la imagen se puede escribir como $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k$

Si la función $\varphi(x)$ es una función que admite descomposición de Taylor, entonces se puede escribir como

$$\varphi(x) = \varphi(b) + \varphi'(b)(x - b) + \frac{\varphi''(b)}{2!}(x - b)^2 + \frac{\varphi'''(b)}{3!}(x - b)^3 + \dots$$

Si sucede que $\varphi''(b) \approx 0$, $\varphi'''(b) \approx 0$, $\varphi^{(v)}(b) \approx 0, \dots, \varphi^{(k)}(b) \approx 0$ la función se reduce a

$$\varphi(x) = \varphi(b) + \varphi'(b)(x - b)$$

Por otro lado, la Wavelet Morlet está definida como:

$$\psi(x) = e^{i\omega_0 x} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

A esta wavelet se le aplicará la Wavelet madre que está definida como

$$W(s, b) = \frac{1}{s} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \psi^* \left(\frac{x - b}{s} \right) dx$$

si $s = 1$, entonces la wavelet madre se escribe como:

$$W(s, b) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \psi^* \left(\frac{x-b}{s} \right) dx$$

$$W(s, b) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[a(x) + b(x) \frac{e^{i\varphi(x)}}{2} + b(x) \frac{e^{-i\varphi(x)}}{2} \right] \psi^* \left(\frac{x-b}{s} \right) dx$$

$$W(s, b) = \int_{-\infty}^{\infty} a(x) \psi^* \left(\frac{x-b}{s} \right) dx + \int_{-\infty}^{\infty} b(x) \frac{e^{i\varphi(x)}}{2} \psi^* \left(\frac{x-b}{s} \right) dx \\ + \int_{-\infty}^{\infty} b(x) \frac{e^{-i\varphi(x)}}{2} \psi^* \left(\frac{x-b}{s} \right) dx$$

$$W(s, b) = \int_{-\infty}^{\infty} a(x) \psi^* \left(\frac{x-b}{s} \right) dx + \int_{-\infty}^{\infty} b(x) \frac{e^{i[\varphi(b)+\varphi'(b)(x-b)]}}{2} \psi^* \left(\frac{x-b}{s} \right) dx \\ + \int_{-\infty}^{\infty} b(x) \frac{e^{-i[\varphi(b)+\varphi'(b)(x-b)]}}{2} \psi^* \left(\frac{x-b}{s} \right) dx$$

$$W(s, b) = a \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \left(\frac{x-b}{s} \right) dx + \frac{b}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i[\varphi(b)+\varphi'(b)(x-b)]} \psi^* \left(\frac{x-b}{s} \right) dx \\ + \frac{b}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i[\varphi(b)+\varphi'(b)(x-b)]} \psi^* \left(\frac{x-b}{s} \right) dx$$

Usando la integración simbólica de MATLAB se obtiene:

$$a\sqrt{2\pi}e^{-\frac{1}{2}\omega_0^2} + \frac{b}{2}\sqrt{2\pi}e^{-\frac{1}{2}(\omega_0+s\omega_s)^2}e^{-i\omega_s b} + \frac{b}{2}\sqrt{2\pi}e^{-\frac{1}{2}(\omega_0-s\omega_s)^2}e^{i\omega_s b}$$

La frecuencia instantánea ω_0 se relaciona directamente con la frecuencia f_0 , la cual es el número de franjas proyectado sobre el objeto, el cual se quiere reconstruir. Es a partir de esta relación como se va obteniendo el mapa de fase, la cual contiene la altura del objeto a reconstruir.

3.2.4. Desdoblar la fase (phase unwrapping)

Una vez que se haya aplicado la transformada wavelet, se procede a desdoblar la fase, esto se hará con un algoritmo de MATLAB. Es importante que se haga este paso dado que es el que ayudará a determinar la altura del objeto y así poder hacer la reconstrucción.

Existen diferentes algoritmos de desdoblamiento de fase, que ayudan en la reconstrucción tridimensional del objeto. Sin embargo, el análisis de este tipo de algoritmos es objeto de estudio de diferentes temas de tesis a nivel doctorado, y para la propuesta presentada en este trabajo únicamente se utilizará un algoritmo sencillo que ya está implementado en MATLAB, además de utilizar el algoritmo de desdoblamiento de fase de flujo máximo/ruta mínima. Este algoritmo es una técnica numérica que ha tenido buenos resultados en el desdoblamiento de la fase envuelta.

3.2.5. Reconstruir el objeto

Este es el último paso del algoritmo, en éste se procede a hacer la reconstrucción, con la información que se obtiene en el paso anterior, en el capítulo siguiente, se mostrarán un par de ejemplos, donde se evidencia que el algoritmo es una muy buena aproximación del objeto.

Capítulo 4

Pruebas y resultados

Pruebas y resultados

Las pruebas se hicieron en dos etapas:

- En la primera de ellas se considera un objeto virtual (creado por computadora), en el cual se decide el número de franjas que se va a proyectar sobre el objeto virtual. Además, se considera el uso de diferentes wavelets, así como de una variación de sus parámetros, en donde se va a considerar aquella wavelet que obtenga el error mínimo en la reconstrucción. Este error se calcula restando el objeto reconstruido del objeto virtual original.
- En la segunda etapa se considera aplicar la perfilometría wavelet, considerando las wavelets y sus parámetros que dieron mejor resultado en el proceso de reconstrucción en los objetos virtuales, los cuales sirven como un marco de referencia. En esta etapa no es posible determinar un error absoluto, debido a que la altura del objeto no se conoce con anticipación.

4.1 Prueba con Objeto Virtual (Creado por computadora)

A partir de una imagen en escala de grises, se reconstruirá tridimensionalmente, con el algoritmo que se propone en este trabajo.

Para poder llevar a cabo las pruebas con objetos creados virtualmente, previamente se notó que había una relación estrecha entre el número de franjas proyectadas al objeto, con la frecuencia espacial, esta relación está dada a través del denominador de f_0 , descrita en la ecuación (4.1.)

$$f_0 = \frac{1}{2^{\{N_{f-i}\} - (N_{fr} - t_1)} \cdot 2^{\{N_{f-i}\} - 2^{\{N_{f-i-1}\}}} \dots (4.1.)$$
$$\frac{2^{\{N_i\} - 2^{\{N_0\}}}$$

Si el número de franjas proyectadas no es una potencia de dos.

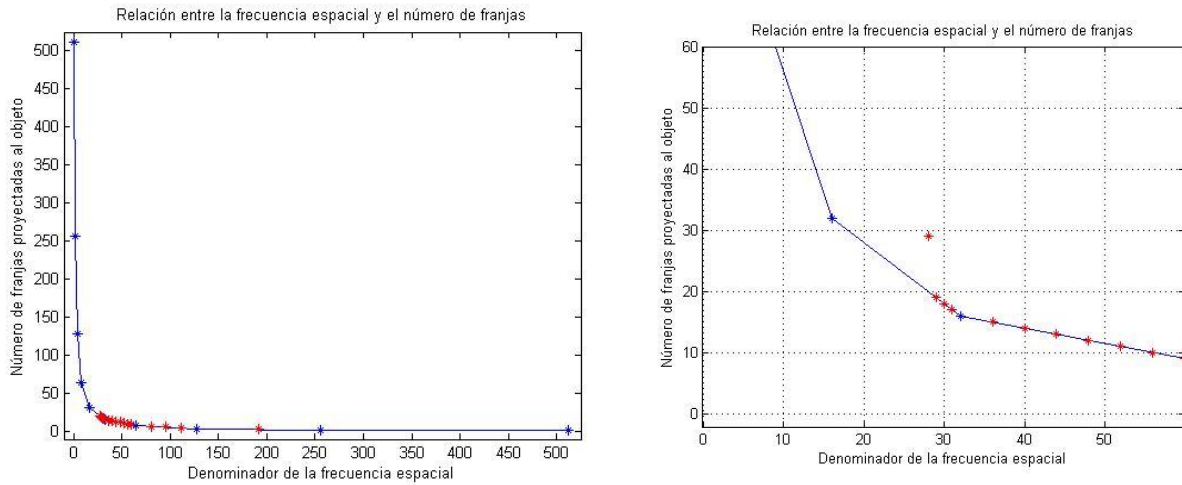


Figura 4.1 Relación f_0 y el número de franjas proyectadas.

Una vez que ya fue determinada la relación descrita en la ecuación (4.1). Se aplicará el algoritmo de reconstrucción 3D, con la transformada Wavelet, siendo el primer paso conocer al objeto creado por computadora

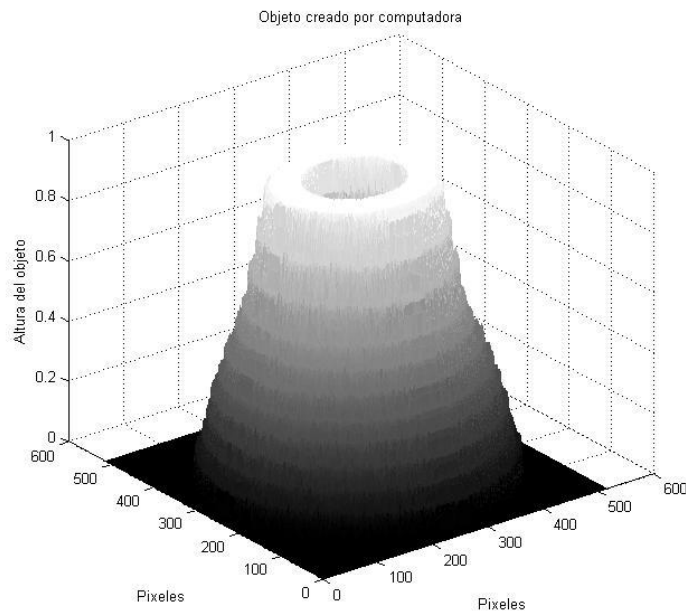


Figura 4.2. Objeto 3D creado virtualmente

En el trabajo de investigación de López (2012) se hizo un estudio comparativo de las distintas wavelets que se usan en el procesamiento de datos, entre las características estudiadas se observa que hay algunas wavelets que son principalmente utilizadas para determinados problemas, por ejemplo, las wavelets Morlet, Mexican Hat y la Shannon son usadas principalmente para procesamiento de imágenes. Sin embargo, las que muestran un mejor desempeño para la reconstrucción tridimensional son Morlet, Shannon y B-Spline. [López]

En el mismo trabajo de investigación se hace un análisis del error generado entre distintos objetos y la relación que hay con el número de franjas proyectadas al mismo, se muestra que la wavelet Morlet es la que genera un error menor cuando hay proyectadas 128 franjas, es necesario volver a acotar que éste número es una potencia de dos, y que este número está fuertemente relacionado con la frecuencia espacial f_0 .

A este objeto creado virtualmente, se le introduce la frecuencia espacial (ver ecuación 4.1), en este caso es $f_0 = \frac{1}{16}$. El patrón de franjas es generado por una función cosenoidal, con la siguiente ecuación:

$$b(x, y) = \cos(2\pi f_0 x + a(x, y)) \quad 4.2$$

Siendo $a(x, y)$ la imagen al que se le desea proyectar las franjas, y $b(x, y)$ la imagen una vez que se le han proyectado las franjas.

Un ejemplo de la conexión de la ecuación 4.1 con la ecuación 4.2 está mostrado por el objeto tridimensional.

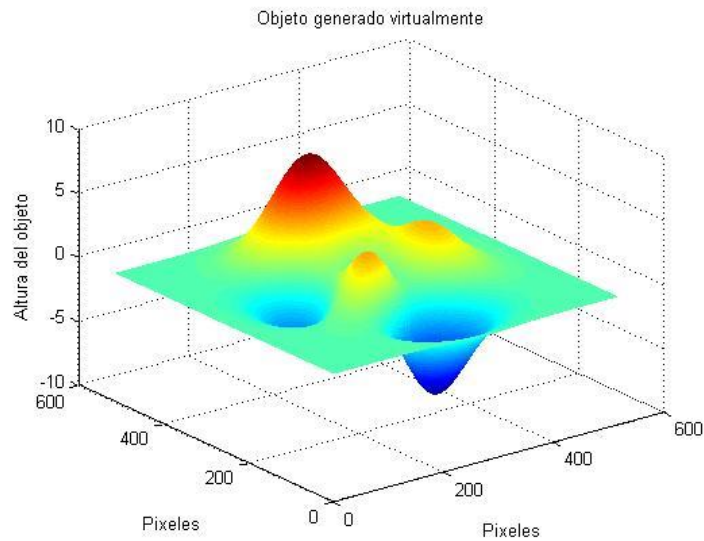


Figura 4.3. Objeto creado virtualmente

De la imagen creada virtualmente, a la cual se le han proyectado las franjas, se obtiene una imagen plana (figura 4.2.) en escala de grises que contienen información crucial para la reconstrucción de la imagen, tal es el caso de la frecuencia espacial f_0 , que está estrechamente relacionada con la cantidad de franjas proyectadas a la imagen.

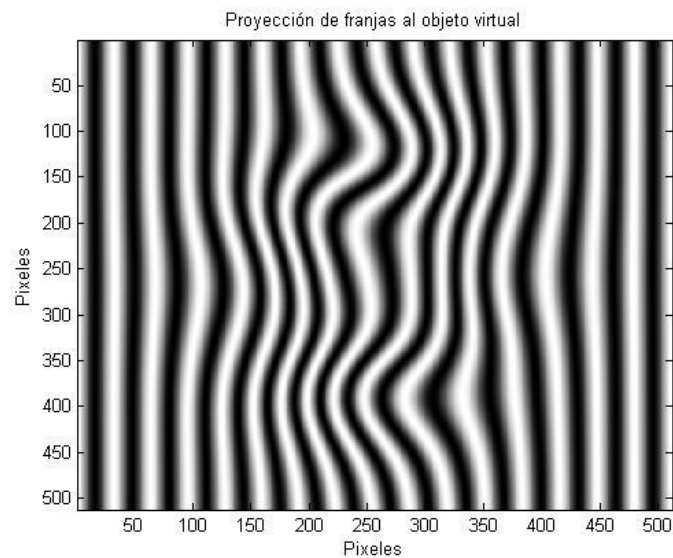


Figura 4.4. Imagen virtual con franjas proyectadas.

Posteriormente una vez que se tenga el objeto con las franjas proyectadas, se le aplica la TWC–1D a cada renglón considerando los valores de fase de la wavelet utilizada, obteniendo así valores de fase instantáneos que corresponden a cada pixel en el renglón correspondiente, en este caso se presenta el resultado obtenido mediante el uso de la Wavelet Morlet. Como resultado total se obtiene una imagen que contiene el mapa de fase, el cual se presenta como imagen y al visualizarla como un arreglo en escala de grises, se puede observar que sus valores se encuentran en el rango $(-\pi, \pi)$. Figura 4.4. a) y 4.4. b)

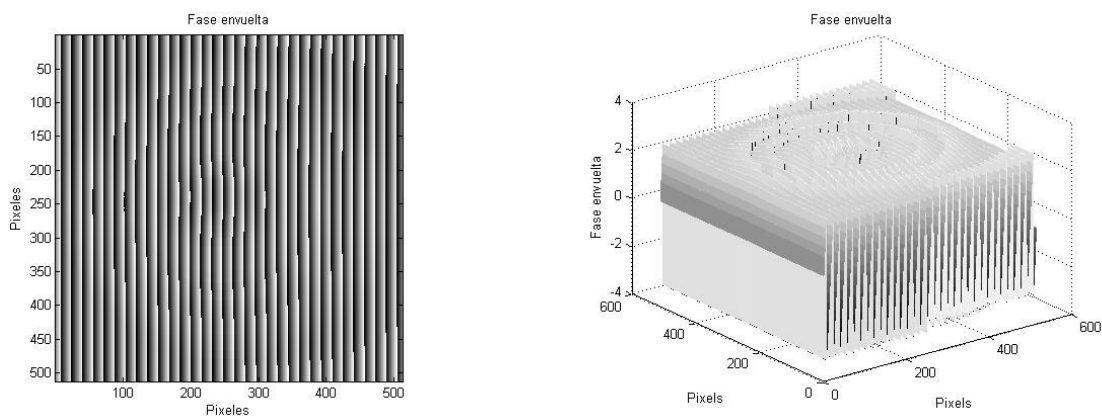


Figura 4.5. Mapa de fase de la imagen con las franjas proyectadas.

Una vez que ya se ha obtenido el mapa de fase, se procede a llevar a cabo el proceso de desdoblamiento de fase, utilizando el algoritmo de desdoblamiento de fase de flujo máximo/ruta mínima, para la reconstrucción del objeto en 3D. La reconstrucción de la imagen es mostrada en la imagen siguiente.

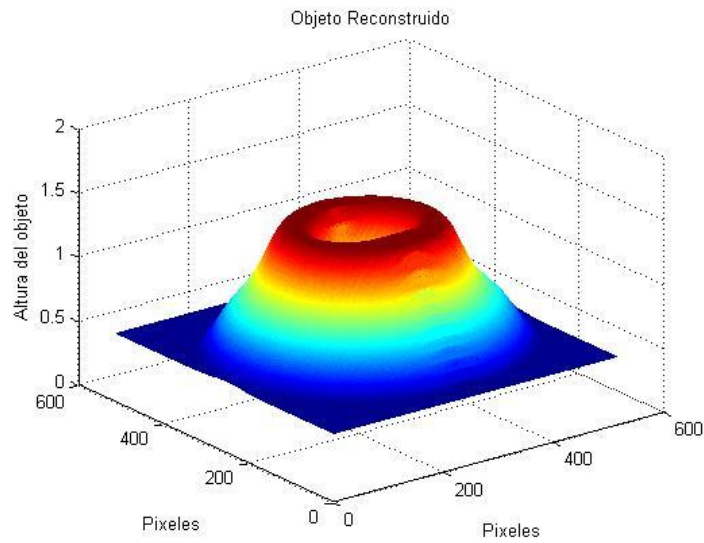


Figura 4.6. Imagen reconstruida en 3D

El resultado es normalizado, para poder tener un conjunto de valores en el rango $[0,1]$ para poder determinar el error en la reconstrucción. La figura 4.6 muestra la diferencia entre el objeto reconstruido y el objeto virtual original, representando con ello el porcentaje de error en la reconstrucción.

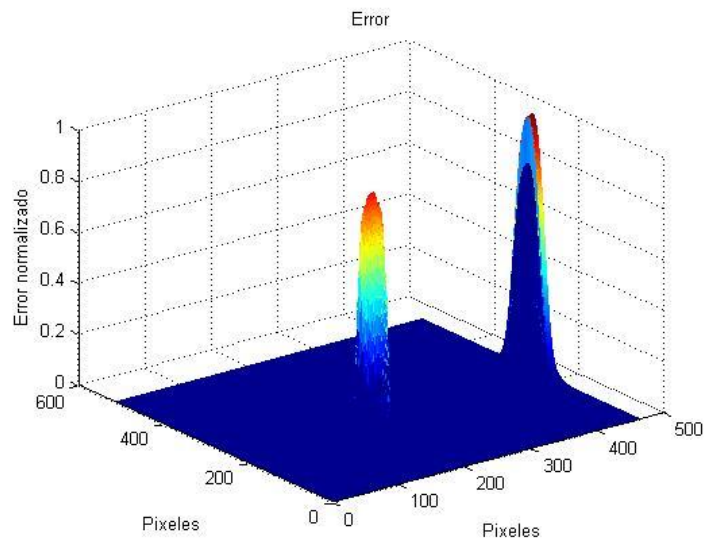


Figura 4.7. Diferencia entre la imagen original y la reconstruida.

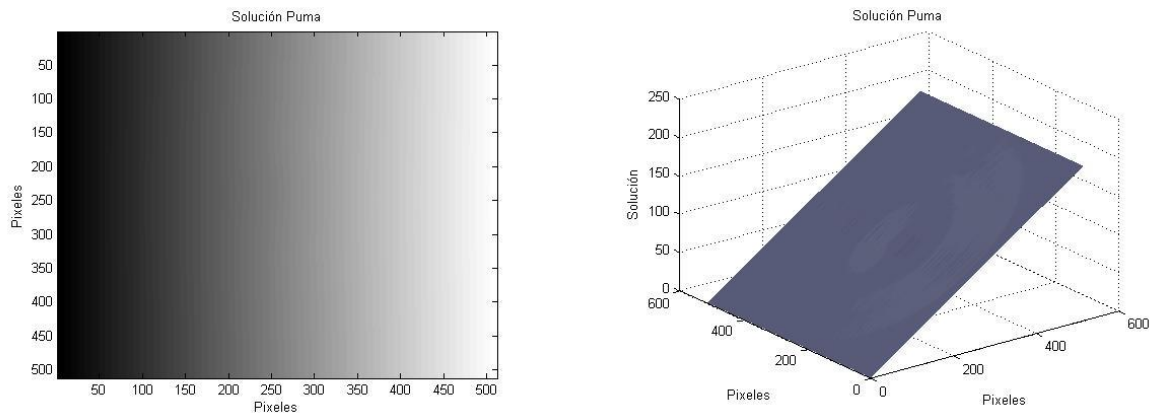


Figura 4.8. Resultado del desenvolvimiento de fase.

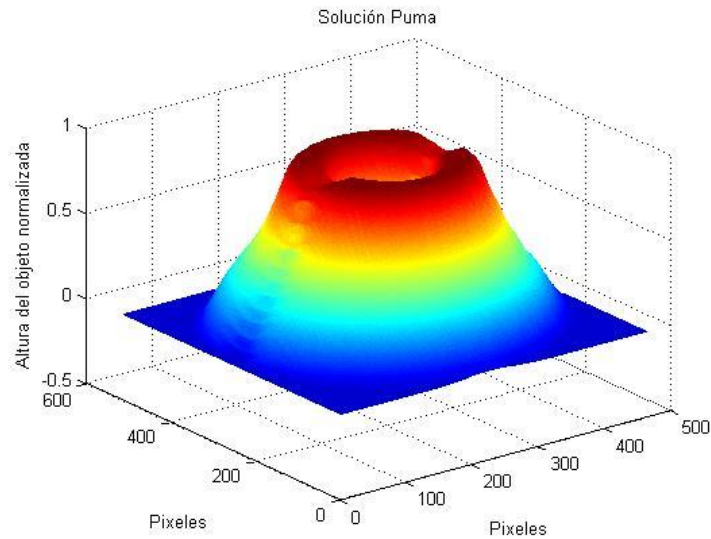


Figura 4.9. Reconstrucción del objeto, con el algoritmo desdoblamiento de fase de flujo máximo/ruta mínima

Otro ejemplo de objeto virtual, al cual se le aplicará la Transformada Wavelet, es el siguiente

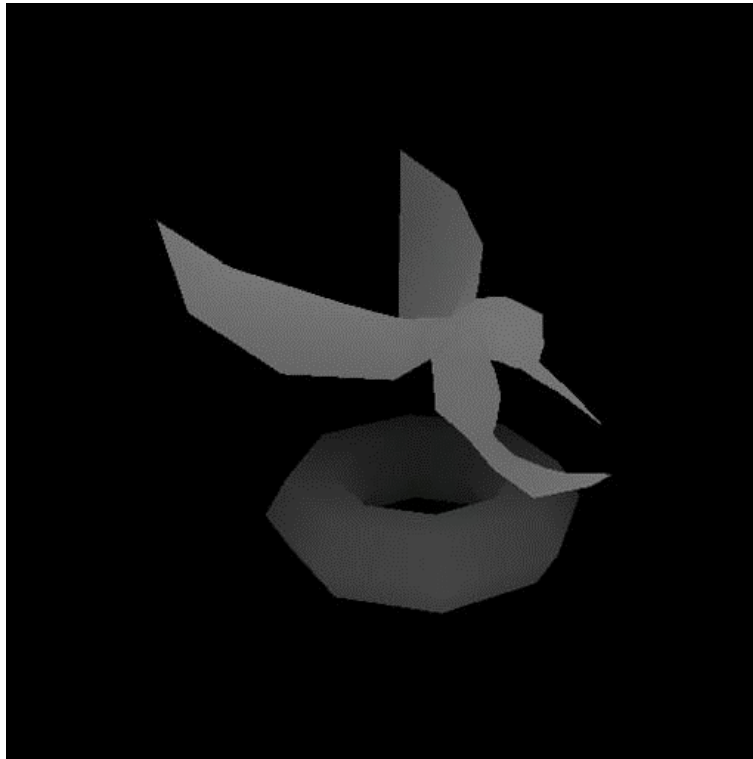


Figura 4.10. Objeto a reconstruir en 3D

La imagen se distorsiona proyectándole franjas a la imagen

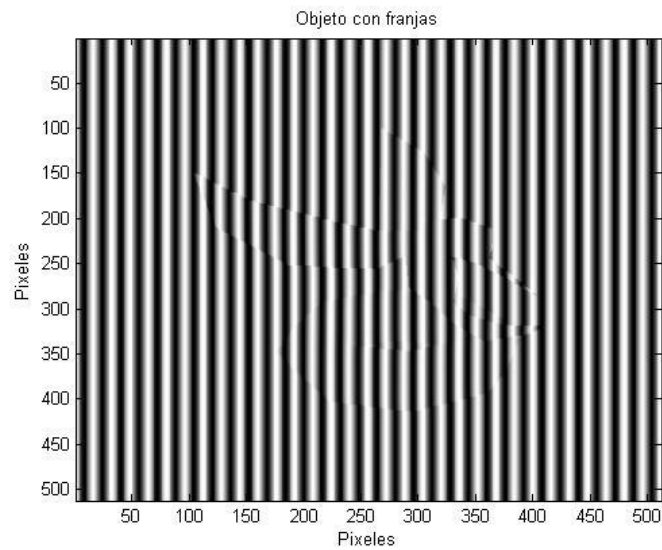


Figura 4.11. Objeto con franjas

Mapa de fase de la imagen, después de que se le ha aplicado la Transformada Wavelet

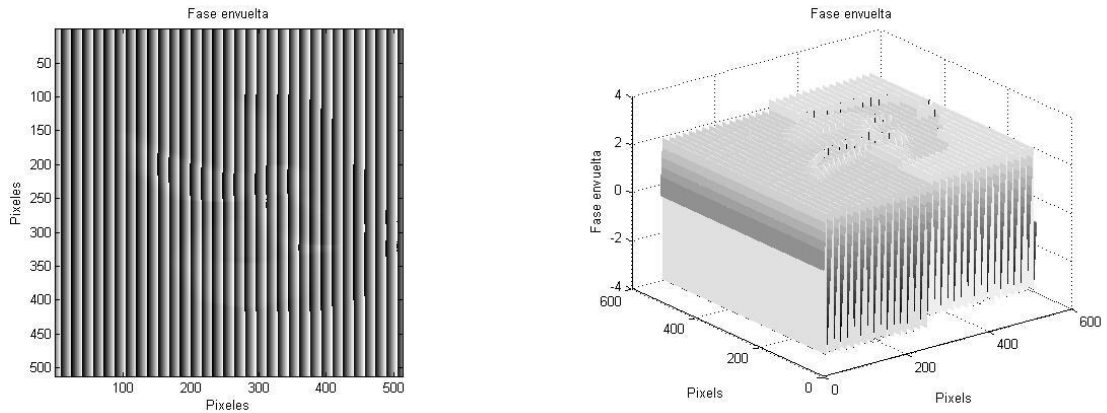


Figura 4.12. Mapa de fase.

Y finalmente se reconstruye la imagen en 3D

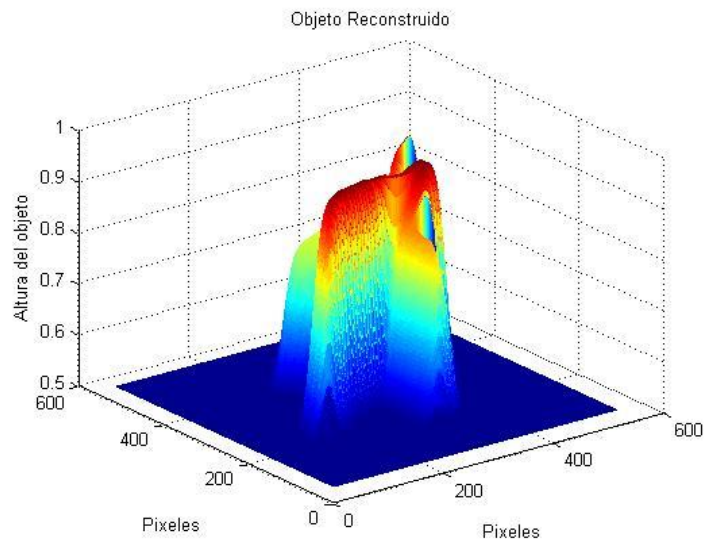


Figura. 4.13. Imagen reconstruida

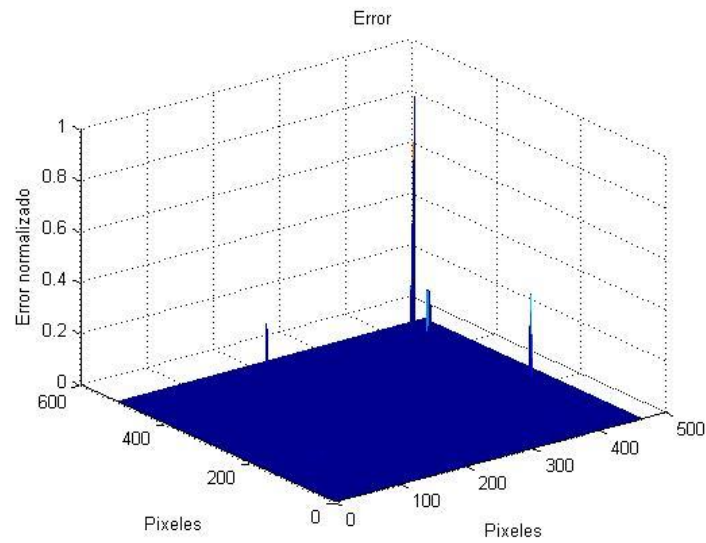


Figura 4.14. Diferencia entre la imagen original y la reconstruida

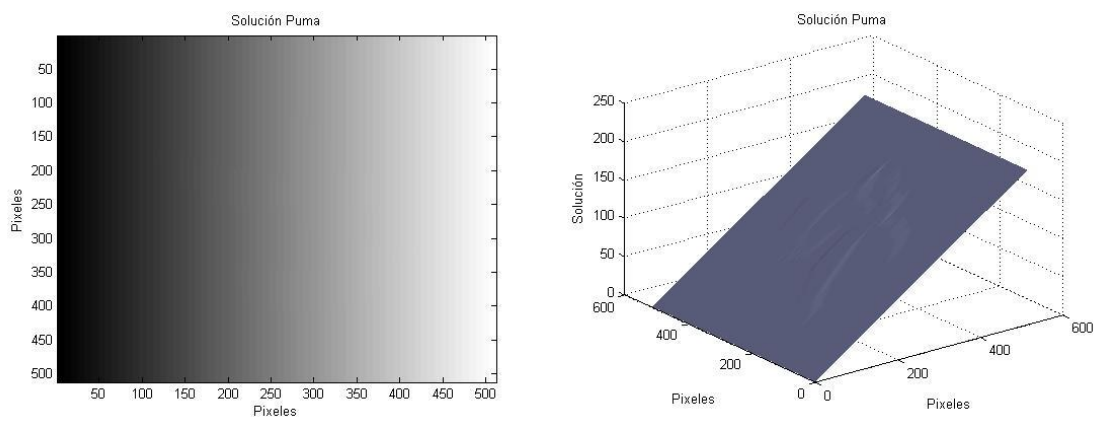


Figura 4.15. Resultado del desenvolvimiento de fase

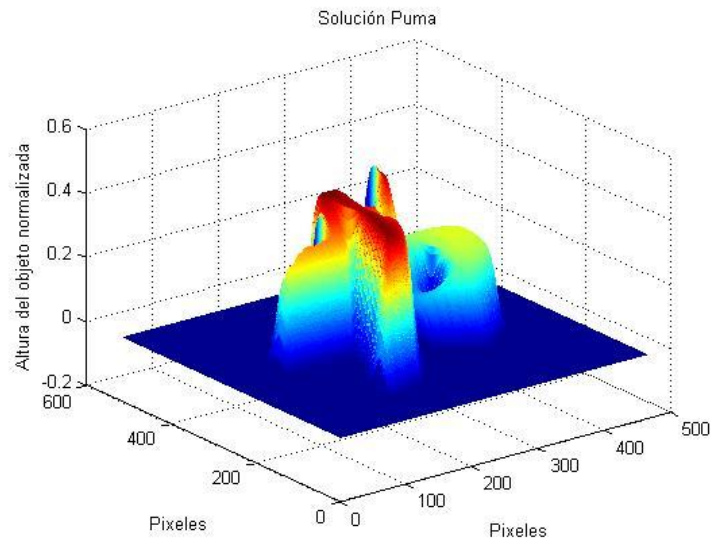


Figura 4.16. Reconstrucción del objeto, con el algoritmo desdoblamiento de fase de flujo máximo/ruta mínima

Aplicando el mismo procedimiento con la wavelet Morlet a otras imágenes creadas virtualmente:

Imagen creada virtualmente

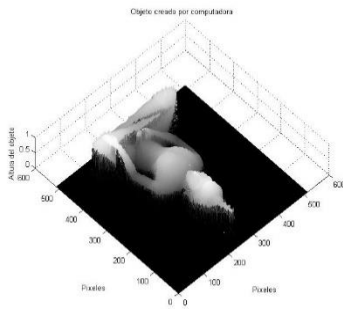
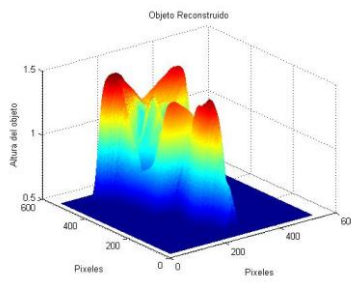


Imagen reconstruida



Error

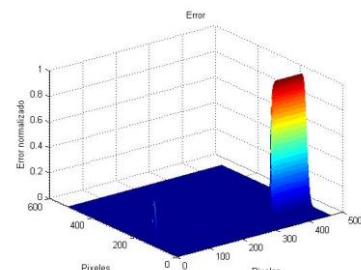
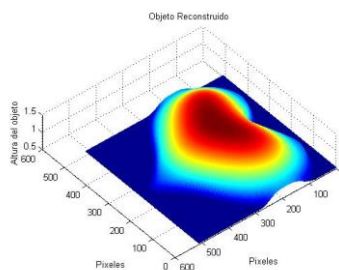
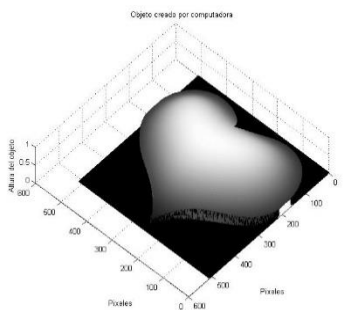
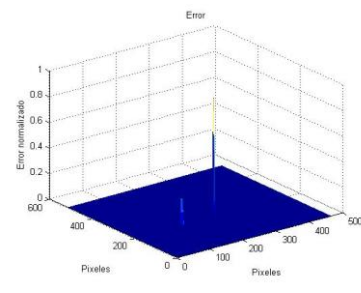


Imagen creada virtualmente

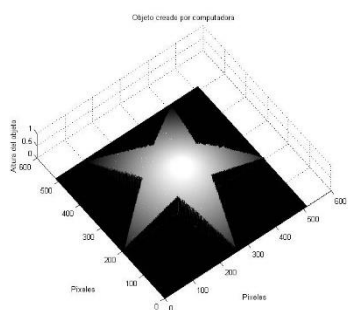
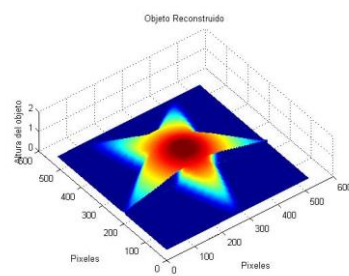


Imagen reconstruida



Error

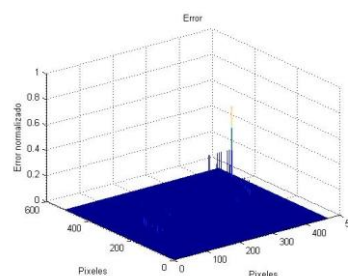
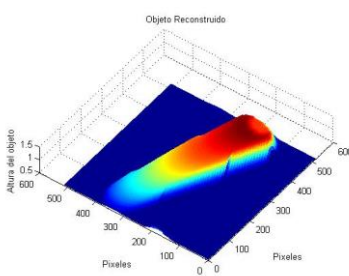
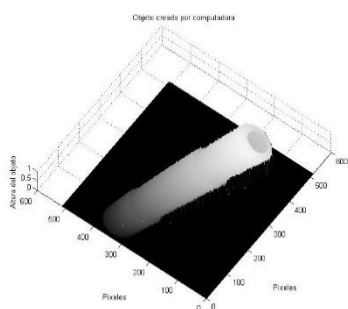
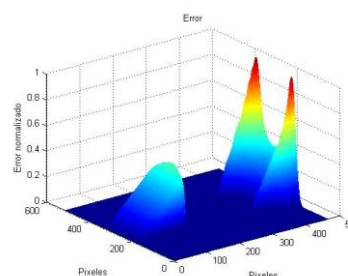
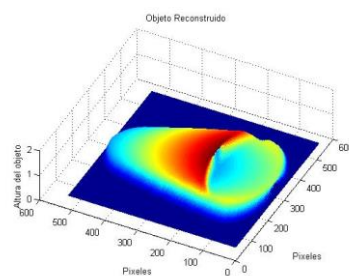
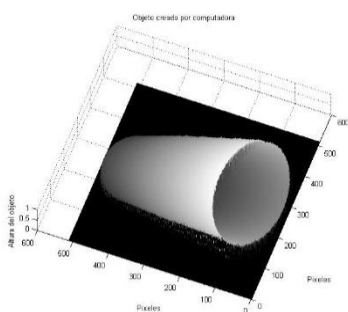
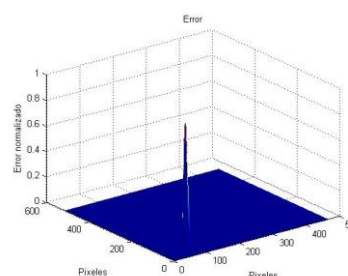
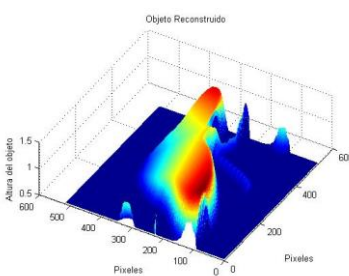
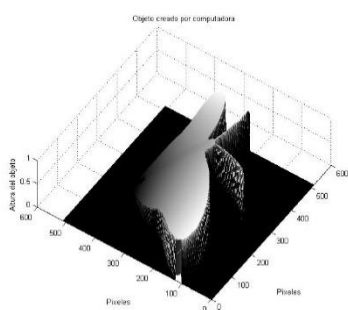
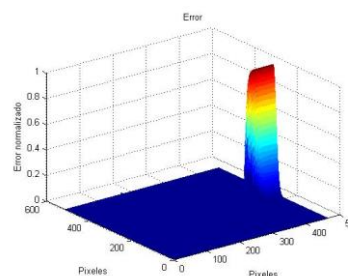


Tabla 4.1. Pruebas con objetos creados por computadora.

4.2 Prueba con Objeto Real

Se hicieron pruebas con objetos reales, a los cuales se les ha aplicado la proyección de franjas, a partir del método de triangulación, tal diagrama para obtener una imagen con franjas proyectadas, es el siguiente:

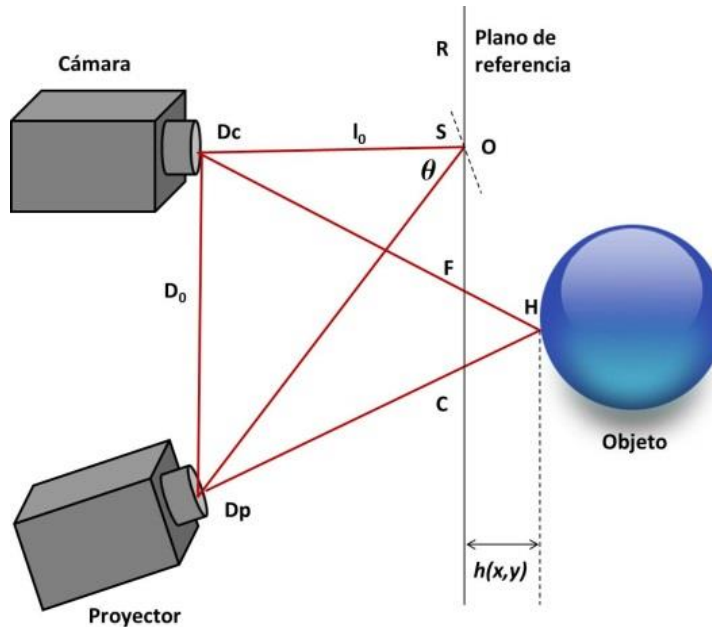


Figura 4.17. Diagrama del experimento

Este experimento se realizó a varios objetos con el fin de obtener imágenes con franjas, las cuales se usarán para este trabajo y reconstruirlas con el algoritmo propuesto, un ejemplo de esto es:

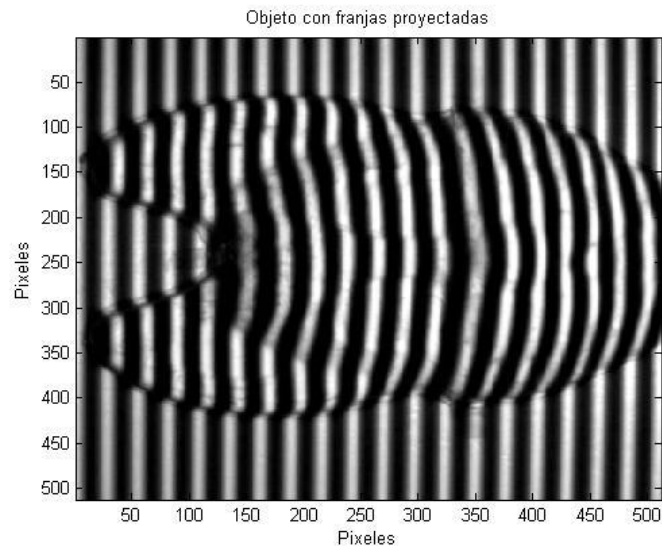


Figura 4.18. Imagen con franjas proyectadas

A esta imagen se le deben contar el número de franjas que tiene para con esto poder calcular la frecuencia inicial y posteriormente se le aplica la Transformada Wavelet para reconstruir el objeto de la siguiente manera:

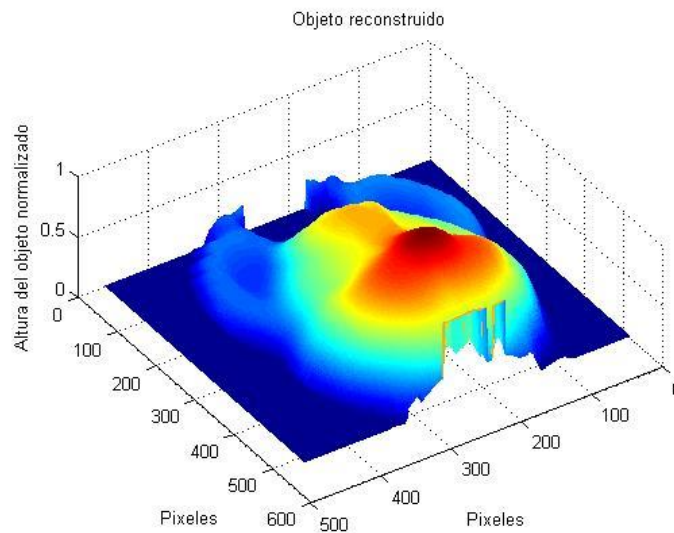


Figura 4.19. Objeto reconstruido

Pruebas a otras imágenes usando la Transformada Wavelet Morlet.

Imagen con franjas

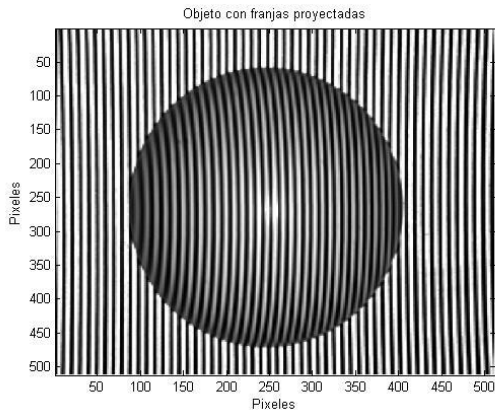


Imagen reconstruida

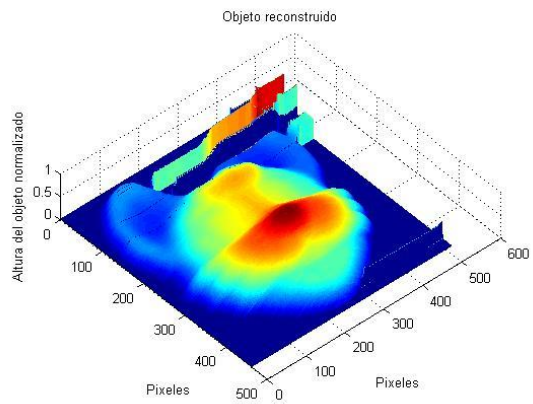
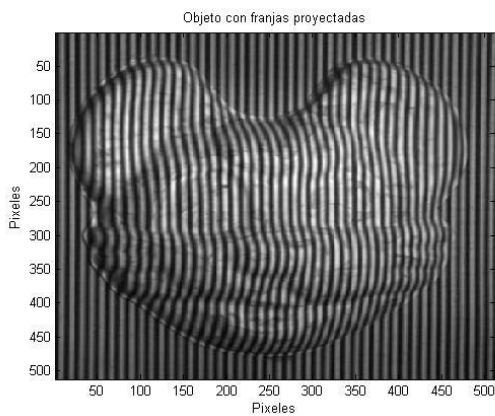
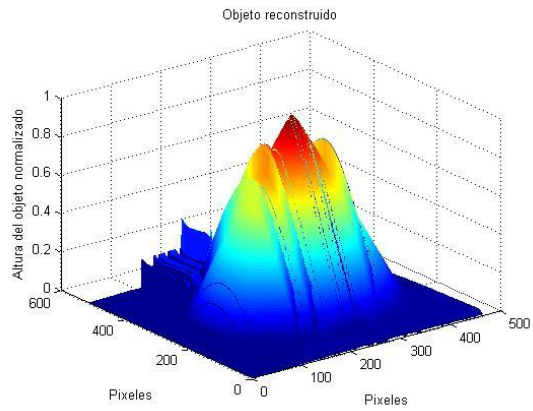
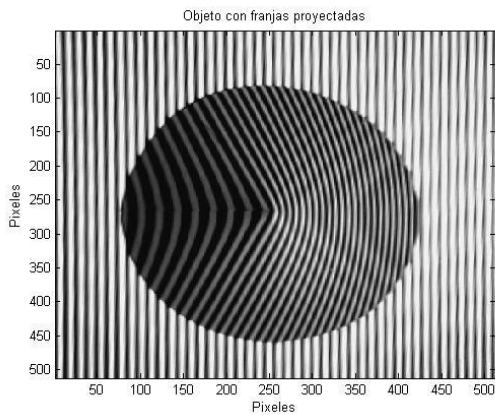
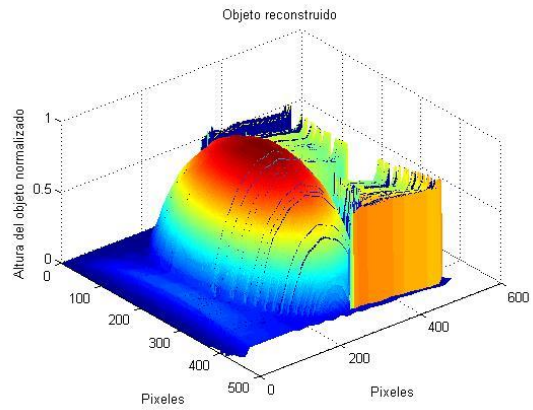


Tabla 4.2. Pruebas con objetos con franjas.

Capítulo 5

Conclusiones

5.1 Conclusiones

El análisis de patrón de franjas con wavelets es considerado una poderosa herramienta para el análisis de señales no estacionarias. Tiene la propiedad de multi-resolución en el dominio del tiempo y frecuencia, en comparación del problema de resolución en otras transformadas. Estas son las razones que motivan a explorar el análisis de proyección de franjas usando Transformada Wavelet.

La idea es introducir el algoritmo de desdoblamiento de fase, la wavelet madre Morlet continua en una dimensión. Ésta técnica puede extraer la fase del patrón de franjas de cualquier imagen, en este trabajo el tamaño de las imágenes con las cuales se hicieron las pruebas para validar el algoritmo son de 512 x 512.

La wavelet madre que ha servido para el procesamiento ha sido la Morlet, al tomar la referencia de López (2012) que muestra las diferencias entre tres posibles wavelets pertinentes al tratamiento de imágenes y que en su estudio mostró que con la wavelet Morlet el error es menor y se presenta un mejor desempeño en la perfilometría wavelet.

Se ha reconstruido objetos creados virtualmente, esto con el fin de validar el algoritmo, y posteriormente aplicarlo a un objeto real, para esto se ha aplicado:

- a. La estimación de la fase.
- b. A una gráfica que le han sido proyectadas franjas, se le han calculado el número de franjas.
- c. A partir de que se conoció el número de franjas proyectadas en una imagen, se pudo calcular la frecuencia inicial, ésta es la que ayudará a determinar la altura del objeto que se desea reconstruir, por lo tanto, es un aspecto muy importante dentro del algoritmo.

El algoritmo ha dado muy buenos resultados en las pruebas de reconstrucción de objetos creado de manera virtual y también para objetos reales, a los cuales se les ha proyectado franjas.

Una de las observaciones que se han hecho es que no hay una transformada wavelet que pueda utilizarse en la reconstrucción 3D de todas las imágenes y eso trae consigo que pueda realizarse un estudio posterior para determinar cuáles de las transformadas wavelets se adaptan mejor a una determinada forma del objeto (suave, con cambios abruptos, con sombras, etc.) en la imagen.

5.2 Trabajo a futuro

El alcance del presente trabajo sólo llega al uso de una transformada, particularmente la wavelet, sin embargo, se tiene presente que deberá realizarse un estudio posterior para buscar y encontrar otras alternativas más sofisticadas o menos costosas o con otras herramientas matemáticas para la reconstrucción tridimensional de un objeto.

Como el presente trabajo de tesis sienta las bases para la reconstrucción 3D usando la transformada wavelet unidimensional continua, se podría proponer como trabajo a futuro la reconstrucción 3D de un objeto se haga con otro algoritmo, usando la Transformada Wavelet en 2D o quizá alguna otra transformada utilizada para la reconstrucción de imágenes, pero en otras dimensiones. Además, buscar alternativas para el cálculo de la frecuencia espacial, pensando en que el tiempo de cómputo se reduzca utilizando algoritmos más sencillos de programar y quizá codificarlos en algún software de libre acceso.

Esto puede generar que los costos de reconstrucción 3D sean menores y las aplicaciones a la medicina, biología, óptica sean cada vez más usando la transformada Wavelet como una herramienta adicional.

REFERENCIAS

Referencias

- [01] Espinoza P. Daniel and Delgado, Joaquín, “*Wavelet y Superresolución*”. Tesis de Maestría en Ciencias Matemáticas Aplicadas e Industriales, de la Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Iztapalapa, México, 2012.
- [02] Fiona Berryman Paul Pynsent and James Cubillo, “*A theoretical Comparison of three fringe analysis methods for determining the three-dimensional shape of an object in the presence of noise*”. Optics and Lasers in Engineering. Vol. 39, pp. 35-50, 2003
- [03] González G., R. A., “*Algoritmo basado en Wavelets aplicado a la detección de incendios forestales*”. Tesis Maestría en Ingeniería Electrónica, Departamento de Computación, Electrónica y Mecatrónica, de la Escuela de Ingeniería de la Universidad de las Américas, Puebla, México, 2010.
- [04] Itoh, K., “*Analysis of the phase unwrapping algorithm*”. Applied Optics, 21(14): 2470-2486, 1982.
- [05] López T., C. V., “*Estudio comparativo entre tipos de Transformada Wavelet para su uso en Reconstrucción tridimensional*”. Tesis Maestría en Sistemas de Información, Universidad Autónoma de Querétaro, México, 2012.
- [06] Mitsuo Takeda, Hideki Ina and Seiji Kobayashi, “*Fourier-Transform method of fringe pattern analysis for computed-based topography and interferometry.*” J.Opt. Soc.Am. Vol. 72, No.1: 156-160, 1982.
- [07] Navarro F., J. y Elizarraraz M., D., “*Introducción a la Transformada Wavelet Continua*”, Edit. Reverté UAM, México, 2010.

- [08] Pramod K. Rastogi, “*Digital Speckle Pattern Interferometry and related Techniques*”. Edit. Wiley, 2001.
- [09] Pedraza, J.C., Wilfrido Rodriguez, Leonardo Barriga, et al, “*Image Processing for 3D Reconstruction using a Modified Fourier Transform Profilometry Method*”, MICAI 2007, LNAI 4827, pp. 705–712, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007.
- [10] Qiang Zhang, Wenjing Chen, Yan Tang, “*Method of choosing the adaptive level of discrete wavelet decomposition to eliminate zero component*”, Optics Communication, pp. 778-785, 2008.
- [11] Wojtaszczyk, P. “*A Mathematical Introduction to Wavelets*”, London Mathematical Society, Students Texts 37, England, 1999
- [12] Wu Lu, “*Research and development of fringe projection-based methods in 3D shape reconstruction*”. Journal of Zhejiang University SCIENCE A, pp. 1026-1036, 2006
- [13] Xiang Zhou, Hong Zhao, “*Three-Dimensional Shape Measurement Using Haar Wavelet Transform*”, Proceedings of ICIRA 2008, Part I LNAI 5314, pp. 753-760, 2008.

ANEXOS



CIINDET 2009

VII Congreso Internacional en Innovación y Desarrollo Tecnológico,
7 al 9 de octubre de 2009, Cuernavaca, Morelos, México.

Propuesta de Reconstrucción 3D utilizando Transformada Wavelet

Quintanar-Pérez M.E., Moya-Morales J.C., Pedraza-Ortega J.C., Canchola-Magdaleno S.L., Gorrostieta-Hurtado E. senior member, IEEE, Aceves-Fernández M.A., Ramos-Arreguín J.M.
PICYT CIDESI, Facultad de Informática, Universidad Autónoma de Querétaro

Resumen: En el presente trabajo se propone el análisis de objetos a los que se les proyectan patrones espaciales conocidos de franjas, mediante el uso de una metodología basada en Transformada Wavelet, con el objetivo de extraer la información tridimensional de los objetos mencionados. Aunque existen algunos algoritmos basados en transformada wavelet, la mayoría de ellos se basa en el proceso de demodulación, la cual considera dos categorías: estimación de fase y estimación de frecuencia. Este trabajo se basa en el análisis de estimación de fase considerando la frecuencia espacial que corresponde al número de franjas proyectado en el objeto, y esta estimación se utiliza en el proceso de desdoblamiento de fase y de selección de coeficientes de la transformada wavelet. Se llevan a cabo diferentes experimentos utilizando objetos creados por computadora y objetos reales que tienen patrones de franjas proyectados en ellos. También se lleva a cabo una comparación del método propuesto con el método modificado de Perfilometría de Fourier.

Palabras Clave: Transformada Wavelet, proyección de franjas, estimación de fase.

Abstract In the present work, we propose the analysis of objects which have a known spatial fringe patterns by using a wavelet transform methodology. The main goal is to extract the tridimensional information from the objects. Although there are some wavelet based algorithms, most of them are based on demodulation process, which includes phase and frequency estimations. This work is based on the phase analysis estimation considering the spatial frequency that corresponds to the number of fringes projected on the object, and the result is used in the phase unwrapping process and also in the wavelet coefficient selection. Some experiments are carried out by computer created objects and also real objects with fringe pattern projected on them. Also, a comparison between the Modified Fourier Transform Profilometry and the proposed method is carried out.

Keywords: Wavelet Transform, fringe projection, phase estimation.

Introducción

Con el creciente uso de técnicas de Procesamiento Digital de Imágenes, se han desarrollado progresos significativos en el área de reconstrucción tridimensional, específicamente en la proyección de franjas. De la variedad de métodos existentes que consideran la proyección de patrones espaciales sinusoidales, existen dos técnicas que ofrecen los mejores resultados para extraer las distribuciones de fase de los patrones de franjas bi-dimensionales deformados por los objetos: cambio de fase (phase-shifting) y Perfilometría de Fourier (Fourier Transform Profilometry ó FTP), propuesto originalmente por Takeda [1] y posteriormente modificado y mejorado por Wu Lu [2] y Pedraza [3]. Además, FTP necesita solamente una imagen para extraer la información de la fase (la cual contiene la información de la altura o profundidad del objeto), que lo convierte en un método muy

popular para el análisis de patrones de franjas. Aunque se han llevado a cabo diferentes modificaciones al método original, una de las desventajas es que la localización espacial es pobre debido a que las operaciones se llevan a cabo de forma global. También se considera el hecho que debido que existe un traslape de altas frecuencias en la etapa de desdoblamiento de fase, esto ocasiona que la altura estimada del objeto se pueda extender de forma global, teniendo como resultado una reconstrucción tri-dimensional de los objetos con errores [3-8]. Por otro lado, existen algunos trabajos de investigación relacionados con la Transformada Wavelet, como el presentado por Xiang [9] y Qiang Zhang [10]. Ambos trabajos se enfocan en utilizar las Wavelets Haar y Modlet para obtener la información de altura de los objetos. Para mejorar el desempeño en la reconstrucción tri-dimensional de los objetos se propone el desarrollo de una metodología basada en Transformada Wavelet.

Transformada Wavelet

Una wavelet se conoce a una forma de onda de duración limitada que tiene un valor medio cero, además de que tiene ciertas similitudes con la Transformada de Fourier. Por ejemplo, en el caso de Fourier se considera la descomposición de una señal arbitraria f en ondas sinusoidales de diferentes frecuencias, mientras que wavelet realiza la descomposición de esa misma señal en versiones escaladas y trasladadas de la wavelet original, conocida como wavelet madre. De forma general, la transformada wavelet de una señal f es un conjunto de coeficientes $W(a,b)$, cuyos índices se asocian con la escala y la posición de la señal. Considerando el caso unidimensional, los coeficientes se obtienen como:

$$W(a,b) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) dx \quad a \in \mathbb{R}^+ - \{0\} \quad y \quad b \in \mathbb{R} \quad (1)$$

donde \mathbb{R} es el conjunto de los números reales.

Esta transformación se considera como la suma sobre todo el intervalo de la señal multiplicada por las versiones trasladadas y escaladas de la función ψ . Cuando se multiplica cada coeficiente por la wavelet apropiadamente escalada y trasladada, podemos obtener la señal original. Sin embargo, para llevar a cabo los cálculos de todos los coeficientes para todas las escalas y posiciones posibles, es casi imposible, y como sucede en el caso de Fourier, se utiliza la versión discreta de la transformada, llamada transformada discreta wavelet (DWT). En esta transformada, se elige un subconjunto de escalas y posiciones, el cual es más eficiente cuando se implementa en algoritmos computacionales como potencias de 2.

$$C(a,b) = C(j,k) = \sum_{i=0}^{2^j-1} f(i) g_{i,a}(x) \quad (2)$$

$$\text{con} \quad a = 2^j, \quad b = k2^j, \quad j \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}$$



CIINDET 2009

VII Congreso Internacional en Innovación y Desarrollo Tecnológico,
7 al 9 de octubre de 2009, Cuernavaca, Morelos, México.

donde Z es el conjunto de números enteros y N es el conjunto de números naturales.
La elección de una wavelet apropiada para una aplicación particular es uno de los pasos más importantes en la práctica. En nuestro caso, presentamos un análisis considerando la wavelet Maar debido a que presenta una mejor localización en los dominios de espacio y frecuencia

Metodología propuesta

Como se había mencionado, la wavelet Maar se utilizará para este análisis. Si se considera la wavelet Maar continua unidimensional, asociada con $z(x)$:

$$W(a, b) = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} z(x) \psi^* \left(\frac{x-b}{a} \right) dx \quad (3)$$

donde $a > 0$ y b son reales, y $*$ significa complejo conjugado. La transformada wavelet de $z(x)$ se convierte en:

$$W(a, b) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} Z(\omega) \Psi^*(a\omega) e^{i\omega b} d\omega \quad (4)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} [Z_1(\omega) + Z_2(\omega)] \Psi^*(a\omega) e^{i\omega b} d\omega$$

considerando una variación lenta de $a(x)$ y $b(x)$, e igualando con la transformada de la señal analítica, se obtiene:

$$W(a, b) \approx \Psi^* \{ a[\alpha_b + \varphi'(b)] \} b(b) e^{i[\alpha_b b + \varphi(b)]} \quad (5)$$

Usando la wavelet Maar, se obtiene:

$$W(a, b) \approx \Psi_M^* \{ a[\alpha_b + \varphi'(b)] \} b(b) e^{i[\alpha_b b + \varphi(b)]} \quad (6)$$

$$= \{ a[\alpha_b + \varphi'(b)] \}^2 e^{i-\alpha[\alpha_b + \varphi(b)]^2 / 2} b(b) e^{i[\alpha_b b + \varphi(b)]}$$

Cuando $\Psi_M(\omega)$ alcanza un máximo en $\omega = +(-Z^{1/2})$ y llevando a cabo una simplificación matemática, se tiene lo siguiente:

$$\varphi(b) = \text{angle} \{ W[a, (b), b] \} - \alpha_b b \quad (7)$$

Detectando el valor de amplitud mayor en cada posición b relativo a x , la fase modulante $\varphi(b)$ de $g(x)$ se puede recuperar, obteniendo de esta forma la información deseada. De la ecuación 7 se puede observar la frecuencia ω_b , esta frecuencia está relacionada directamente con la frecuencia f_b utilizada en el método de perfilometría de Fourier.

La figura 2 presenta el diagrama a bloques del método propuesto. Como primer paso se obtiene la imagen que contiene al objeto a digitalizar. Después, se determina el número de franjas que contiene la imagen, este número es importante debido a que sirve para encontrar la frecuencia espacial f_0 . Un paso adicional es el seleccionar el método a utilizar, bien sea el método FTP Modificado o el de Wavelet. De inicio, se selecciona siempre el método de wavelet, en el cual se aplica el algoritmo ya descrito previamente.

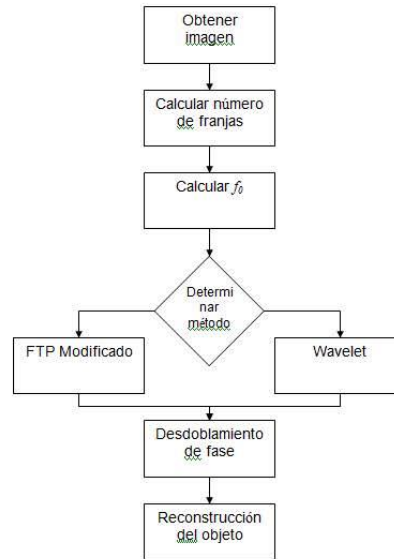


Figura 1. Metodología propuesta

Uno de los pasos cruciales en la reconstrucción 3D es el de desdoblamiento de fase (phase unwrapping), para el cual se utiliza la ecuación 7 y se resta la frecuencia f_0 . Finalmente se aplica el algoritmo de desdoblamiento de Itoh [8], obteniendo el objeto reconstruido.

Resultados experimentales

Para probar la metodología, se crean objetos virtuales creados por computadora, como se observa en la figura 2. Posteriormente se genera un patrón de franjas sinusoidales con una frecuencia espacial que se agregan al objeto descrito. Es importante notar que como se había mencionado anteriormente, la transformada wavelet se puede implementar más fácilmente si se tienen múltiplos de 2, por esta razón se generaron imágenes de 512 x 512 píxeles. El resultado es que las franjas son distorsionadas por el objeto virtual y de esta forma tenemos nuestro objeto a digitalizar, como se observa en la figura 3. Nótese que en la vista de la figura 3, se tiene un patrón distorsionado ideal, es decir, sin sombras ni objetos con huecos.



CIINDET 2009

VII Congreso Internacional en Innovación y Desarrollo Tecnológico,
7 al 9 de octubre de 2009, Cuernavaca, Morelos, México.

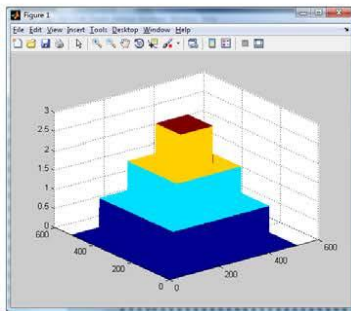


Figura 2. Objeto virtual creado por computadora

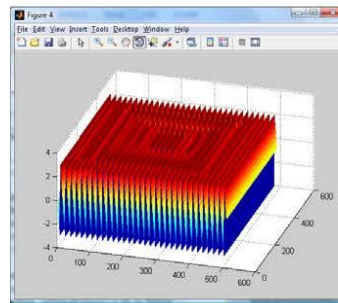


Figura 5. Malla del mapa de fase del objeto

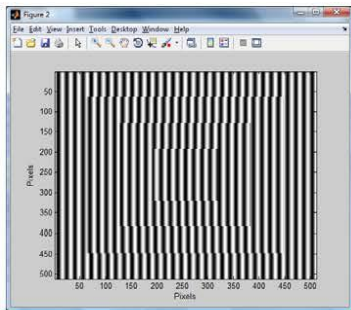


Figura 3. Patrón de franjas proyectado sobre el objeto virtual

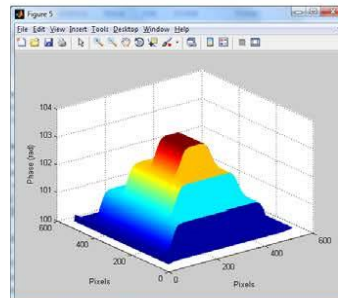


Figura 6. Fase desenrollada que muestra el objeto reconstruido

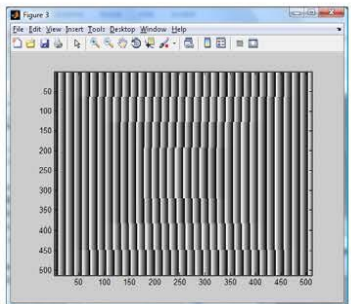


Figura 4. Imagen del mapa de fase del objeto

Al aplicar la transformada wavelet se obtiene el mapa de fase mostrado en la figura 4. Claramente se observa que no existen cambios abruptos de la fase intermedios en la imagen que se normalmente se pudieran observar como ruido de alta frecuencia.

En la figura 5 se observa la malla del mapa de fase, en donde se puede observar con mayor claridad que los cambios de fase están bien definidos.

Finalmente en la figura 6 se observa el objeto reconstruido después de aplicar la metodología completa. Además en la figura 7 se muestra el error entre el objeto reconstruido y el objeto creado virtualmente. Se puede notar que se tiene un mayor error en los cambios abruptos de forma.

5. Comparación con Perfilometría de Fourier Modificada

Con el objeto de validar el método, al objeto con las franjas proyectadas y que se muestra en la figura 2, se aplicó la metodología de Perfilometría de Fourier Modificada, y los resultados se muestran en la figura 8. Como se puede observar, la forma del objeto reconstruido se parece al original, sin embargo, presenta algunas diferencias marcadas en los bordes de la pirámide.



CIINDET 2009

VII Congreso Internacional en Innovación y Desarrollo Tecnológico,
7 al 9 de octubre de 2009, Cuernavaca, Morelos, México.

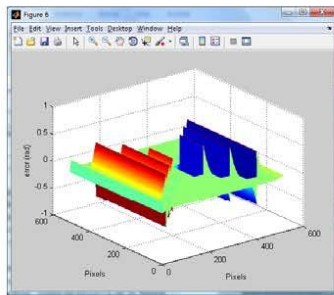


Figura 7. Error en el proceso de reconstrucción

La variación del error al aplicar el método de Transformada Wavelet en comparación con el de Perfilometría de Fourier Modificado, está en el orden de 3 a 5%. Considerando los hechos presentados, se puede afirmar que el método de transformada wavelet presenta ventajas sobre otros métodos ya establecidos y se puede aplicar con cierto grado de confianza.

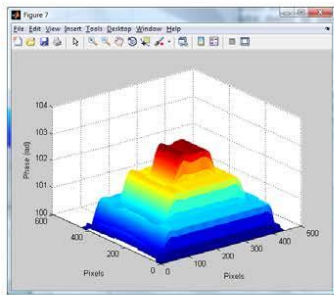


Figura 8. Objeto reconstruido utilizando el método de Perfilometría de Fourier Modificado.

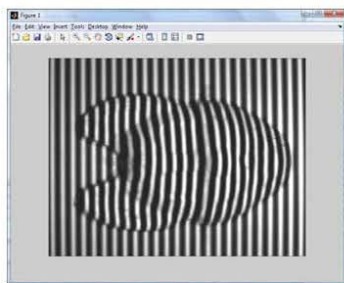


Figura 9. Objeto real a digitalizar utilizando transformada wavelet.

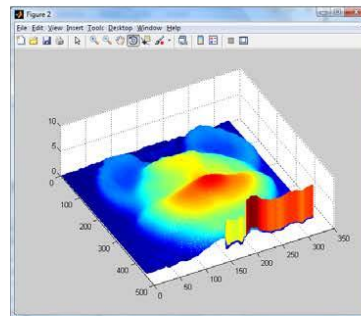


Figura 10. Objeto reconstruido usando el método propuesto.

Finalmente, la metodología basada en transformada wavelet se aplicó en un objeto real, el cual se muestra en la figura 9. El resultado de la reconstrucción se muestra en la figura 10. Nótese que el método muestra un excelente desempeño al reconstruir el objeto, y solamente en una pequeña parte muestra un error en la forma del objeto.

6. Conclusiones y trabajo futuro

En este artículo se presentó una metodología de reconstrucción tridimensional basado en transformada wavelet. El método muestra un buen desempeño cuando se utiliza con objetos virtuales creados por computadora, y aún comparándolo con otros métodos establecidos como el de Perfilometría de Fourier Modificado, el error es menor en el método propuesto. Se llevó a cabo una digitalización a un objeto real, mostrando buenos resultados.

El método pudiera mejorar al profundizar en el análisis matemático de las frecuencias que ocasionan un traslape en el proceso de desdoblamiento de fase. Como trabajo futuro, se llevarán a cabo pruebas con otros tipos de wavelet, para encontrar una metodología que se adapte mejor a las diferentes variaciones en formas de objetos a digitalizar.

Referencias

- [1] Mitsuo Takeda, Hideki Ina and Seiji Kobayashi, Fourier-Transform method of fringe pattern analysis for computed-based topography and interferometry. *J.Opt. Soc.Am.* Vol. 72, No.1: 156-160, 1982.
- [2] Wu Lu, "Research and development of fringe projection-based methods in 3D shape reconstruction". *Journal of Zhejiang University SCIENCE A*, pp. 1026-1036, 2006
- [3] Pedraza, J.C., Wilfrido Rodriguez, Leonardo Barriga, et al, "Image Processing for 3D Reconstruction using a Modified Fourier Transform Profilometry Method", *MICAI 2007, LNAI 4827*, pp. 705-712, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007.
- [4] Fiona Beryman Paul Fynsent and James Cubillo, A theoretical Comparison of three fringe analysis methods for determining the three-dimensional shape of an object in the presence of noise. *Optics and Lasers in Engineering*, Vol. 39: 35-50, 2003.
- [5] Pramod K. Rastogi, *Digital Speckle Pattern Interferometry and related Techniques*. Edit. Wiley, 2001.



CIINDET 2009

*VII Congreso Internacional en Innovación y Desarrollo Tecnológico,
7 al 9 de octubre de 2009, Cuernavaca, Morelos, México.*

- [6] Fiona Benymman Paul Pysent and James Cubillo, "A theoretical Comparison of three fringe analysis methods for determining the three-dimensional shape of an object in the presence of noise". *Optics and Lasers in Engineering*, Vol. 39, pp. 35-50, 2003
- [7] Pramod K. Rastogi, "Digital Speckle Pattern Interferometry and related Techniques". Edit. Wiley, 2001
- [8] Itoh, K., "Analysis of the phase unwrapping algorithm". *Applied Optics*, 21(14): 2470-2486, 1982.
- [9] Xiang Zhen, Hong Zhao, "Three-Dimensional Shape Measurement Using Maar Wavelet Transform", *Proceedings of ICIRA 2008, Part I LNAI 5314*, pp. 753-760, 2008.
- [10] Qiang Zhang, Wenjing Chen, Yan Tang, "Method of choosing the adaptive level of discrete wavelet decomposition to eliminate zero component", *Optics Communication*, pp. 778-785, 2008.

Currículo corto de los autores

María Eugenia Quintanar Pérez

Licenciada en Matemáticas egresada de la Universidad Autónoma de Querétaro. Actualmente es estudiante de Maestría en Ciencia y Tecnología del Centro de Ingeniería y Desarrollo Industrial.

Moya Morales Juan Carlos

Estudiante de la Ing. En Computación de la Facultad de Ingeniería en la Universidad Autónoma de Querétaro.

Sandra Luz Canchola Magalano

Licenciatura en Informática y la Maestría en Ingeniería de Software Distribuido en la Facultad de Informática de la Universidad Autónoma de Querétaro. El grado de Doctor en Tecnología Avanzada del Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN. Actualmente es Profesora-Investigadora en la Facultad de Informática de la Universidad Autónoma de Querétaro.

Jesús Carlos Pedraza Ortega

Ingeniero en Electrónica egresado del Instituto Tecnológico de Celaya en 1993. Cursó la Maestría en Ingeniería Eléctrica en la FIMEE, Universidad de Guanajuato. Sus estudios de Doctorado fueron en Ing. Mecánica en la Universidad de Tsukuba en Japón en 2002. Actualmente es Profesor-Investigador en la Facultad de Informática de la Universidad Autónoma de Querétaro.

Efrén Cormostieta Hurtado

Ingeniero Electrónico egresado del Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Occidente (ITESO). Cursó la Maestría y Doctorado en Mecatrónica en el Centro de Ingeniería y Desarrollo Industrial. Actualmente es Profesor-Investigador en la Facultad de Informática de la Universidad Autónoma de Querétaro.

Marco Antonio Aceves Fernández

Ingeniero en Telemática egresado de la Universidad de Colima en 2000. Cursó la Maestría y Doctorado en la Universidad de Liverpool, Inglaterra en el 2006. Actualmente es Profesor-Investigador en la Facultad de Informática de la Universidad Autónoma de Querétaro.

Juan Manuel Ramos Arreguín

Ingeniero en Electrónica egresado de la FIMEE, Universidad de Guanajuato. Cursó la Maestría en Ingeniería Eléctrica en la FIMEE, Universidad de Guanajuato. Sus estudios de Doctorado fueron en Ing. Mecatrónica en el CIDESI, México en 2008. Actualmente es Profesor en la Facultad de Informática de la Universidad Autónoma de Querétaro.



CONSTANCIA

Artículo: *“Propuesta de reconstrucción 3D utilizando transformada Wavelet.”*

Autores: *Jesus Carlos Pedraza Ortega, Maria Eugenia Quintanar Perez, Juan Carlos Moya Morales, Sandra Luz Canchola Magdaleno, Marco Antonio Aceves Fernandez, Juan Manuel Ramos Arreguin, Efen Gorrostieta Hurtado.*

Id. artículo: 639

Área: *Sistemas Computacionales*

El Comité Técnico del VII Congreso Internacional Sobre Innovación y Desarrollo Tecnológico CIINDET 2009, que se llevó a cabo en la ciudad de Cuernavaca, Morelos, México, del 7 al 9 de octubre de 2009, hace constar que el artículo citado fue presentado de acuerdo con el programa técnico del congreso e incluido en las memorias del mismo.

La presente constancia se expide para los fines legales que a los autores convengan.

Cuernavaca, Morelos, México a 9 de octubre de 2009.

Atentamente

M.C. Humberto Hernández García
Presidente del Comité Técnico CIINDET 2009





IEEE Sección Morelos y el
Instituto de Investigaciones Eléctricas

Otorgan el presente

Reconocimiento

A: **María Eugenia Quintanar Pérez**

Por su participación como

CONGRESISTA

Durante el VII Congreso Internacional sobre Innovación y
Desarrollo Tecnológico, realizado del 7 al 9 de octubre del 2009,
en la ciudad de Cuernavaca, Morelos, México.



M.C. Julio A. Hernández Galicia
Presidente IEEE Sección Morelos



Ing. Jullán Adolfo Adame Mirandas
Presidente Comité Organizador

A Comparison between Local and Global Phase Unwrapping Algorithms in a Modified Fourier Transform Profilometry Method

Sotomayor-Olmedo A., Pedraza-Ortega J.C., Aceves-Fernandez M.A. Gorrostieta-Hurtado E. Canchola-Magdaleno S.L., Ramos-Arreguin J.M., Quintanar-Perez M.E.
CIDIT-Facultad de Informatica, Universidad Autonoma de Queretaro, PICYT-CIDESI
Queretaro, Mexico.
{artemio.sotomayor, carlos.pedraza, marco.aceves, efren.gorrostieta, juan.ramos}@uaq.mx,
sandracanchola@yahoo.com, mequintanar@hotmail.com

Abstract

Abstract— This work present a modified Fourier Transform Profilometry method, in particular, the development of local and global phase unwrapping algorithms has been considered, because this is one of the major challenges when this method is applied. The basic idea is to project a sinusoidal fringe pattern with a known spatial frequency on the object to digitize, and then a vision system captures and processes the image to obtain the object's depth information. First, the fringe pattern is projected on a reference plane then an image is acquired, later the object to digitize is placed in front of the reference plane and then another image is acquired. The fringe pattern is distorted due to the object's irregular shape. One of the main difficulties to face is the high frequency content in the unwrapping process. This effect can be minimized by knowing the spatial frequency and its multiples. Here, we propose to implement global and local phase unwrapping algorithms to overcome the high frequency problems. These algorithms are part of the modified Fourier Transform Profilometry Method (FTP), where the resulting phase difference of the acquired and processed images have the information of the object's depth. Some tests with computer generated and real objects with different geometries are carried out to verify the proposed methodology, considering the factors that mostly affect the method.

Keywords— Global, Local, Phase Unwrapping, profilometry

1. INTRODUCTION

In the last three decades, the idea to extract the 3D information of a scene from its 2D images has been widely investigated. Several contact and non-contact measurement techniques have been deployed in many science and engineering applications to compute the 3-D surface of an object. Basically, the aim is to extract the useful depth information from an image in an efficient and automatic way. Then, the obtained information can be used to guide various processes such as robotic manipulation, automatic inspection, reverse engineering, 3D depth map for navigation and virtual reality applications [1][2][10]. Among all the diverse methodologies, one of the most widely used is the fringe pattern analysis technique. Fringe pattern analysis algorithms can be classified into two categories: spatial and temporal techniques. Spatial algorithms calculate the phase of a pixel in a fringe pattern depending on its neighboring pixels. Examples of a spatial technique are: Fourier fringe analysis, wavelet transform fringe analysis and direct phase demodulation.

Spatial techniques require at least one fringe pattern to calculate phase components. Conversely, temporal algorithms require at least three images to calculate the phase components of a fringe pattern.

Any fringe analysis algorithm can be divided into many processing stages: phase extraction and phase unwrapping. The first stage extracts the phase of a fringe pattern by using Fourier [1][3] or Wavelet [4][5] among other algorithms. The phase produced by this stage is typically wrapped into the interval $(\pi, -\pi)$. The wrapped phase contains 2π step changes, which could be removed by using phase unwrapping algorithms. The phase unwrapping algorithms can be divided in two categories: local and global phase unwrapping algorithms. Local phase unwrapping algorithms find the unwrapped phase values by integrating the phase along a certain path and are also called path-following algorithms [6]. Global phase unwrapping algorithms locate the unwrapped phase by minimizing a global error function and are also called minimum-norm algorithms [6].

In this work, comparisons between local and global phase unwrapping algorithms are presented as the main contribution.

Código de las funciones propuestas

Uno de los pasos dentro de la metodología es calcular el número de franjas que se le proyectan a un objeto real o creado virtualmente. Existe más de algún modo de determinar el número de franjas, sin embargo, para el trabajo de tesis presente se propuso un algoritmo cuyo diagrama de flujo está descrito en la figura 3.4 y cuyo código se programó en MATLAB. Para el cálculo de franjas se necesita un archivo que contenga la imagen de tamaño 512 x 512 pixeles, que se quiera procesar, y el resultado de la función será un número que indique cuántas franjas verticales o distorsionadas haya en la imagen.

```
function num_f=numero_franjas(fringes)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%% función número de franjas                                     %%
%% calcula el número de franjas que se le proyectaran         %%
%% a un objeto para su reconstrucción                         %%
%% creado: mayo 2009                                         %%
%% autor: maría eugenia quintanar perez                     %%
%% asesor: dr. j. carlos pedraza ortega                     %%
%% entradas: fringes matriz de datos de la imagen           %%
%%              de tamaño 512x512, con franjas              %%
%% salidas: num_f número de franjas que hay en la imagen    %%
%%              servirá para determinar la fo               %%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

dim=length(fringes);
figure(1); colormap(gray(256)); imagesc(fringes);
tempo=dim/2;
x=double(fringes(tempo,:,2));
figure(2); plot(x); grid on;
xmax=max(x);
xmin=min(x);
x=x-(xmax+xmin)/2;
figure(3); plot(x); grid on;

cuenta_f=0;
ref=-1;
for i=1:dim
    temp=sign(x(i));
    if temp==--ref
        ref=-ref;
        cuenta_f=cuenta_f+1;
    end
end
num_f=floor(cuenta_f/2);
```